EVCLIDES

GEOMETRIA ESPECVLATIVA,

Y PRACTICA DE LOS PLANOS, Y SOLIDOS.

DISPVESTA POR D. ANTONIO JOSEPH Deu y Abella, natural de la Ciudad de Sacer, Governador que fue de la Ciudad de Castillo Aragonês, y Capitan agregado al estado mayor desta Ciudad.

LO DEDICA A LA MADRE DE DIOS DEL PILAR.

En Zaragoça: por Francisco Revilla, año 1723.

A LA SOBERANA EMPERATRIZ,

HIJA, ESPOSA, Y MADRE DEL MISMO DIOS, MARIA Santissima del Pilar.

NUBE, QUE DEL MAR SE ELEBA LEVE, Y FECUNDADA de Dios, su sombra assombra. Nube en *Columna*, *Madre*, que sustenta el Cielo, y Cielo en Columna, que ilustra â Zaragoza.

PEnsaba yo, (Soberana Señora) que el Militar estruendo, donde madruga Marte, por saludar à Belona, vivia solo de la espada, y del fusil: Y con este supuesto, passè â obsequiar mi *Rey, y Señor Phelipe Quinto* (que Dios guarde) en sus Campañas, y Reales; y porque el blason, que en mi es servicio, no se roçara con el merito, que lleba consigo la recomendacion de vn premio, determinè solo gozar el caracter de fiel Vassallo en la guerra, sin mas vsura, que ser esclavo. En esta escuela *Señora*, donde sus principios *primeros*, son las Armas, *Definiciones* los echos, y *conclusiones* las Plazas, desconocì con la experiencia el pensamiento, y practicando sus avisos, principios practicos del Militar estudio, estudiè, para que con la pluma, mas se enobleciesse de la espada mejorado su exercicio, que siendo la guerra vn *Archivo de secretos, indiferente su fortuna, sus exitos inciertos*, para assegurar secretos en la razon, y no malograr acasos militares en la Campaña, naciò la *Geometria* allà en Egipto, tan Noble, que segun Philon Hebreo, *es Madre, y Princesa de todas las Ciencias, y disciplinas.*

Alagado pues mi animo con el silvo blando de su dulçura, dediquè mi atencion Agente, para adquirirla, y siendo Maestra mi aplicacion sin Maestro, pude deber à Dios, y al benigno influxo de vuestro patrocinio, conseguir con experiencias sus noticias. En tan desecha, y prolija tarea, no puedo negaros *Emperatriz soberana*, que mi agradecimiento, detenido hasta aora en las margenes del respeto, zoçobraba à empeños de cortès, por consagrar à vuestras plantas mi desvelo, y aviendo llegado, *por continuar el*

Real

Real servicio, à esta celebre Ciudad: (*Celebre*, no por sus divertidos, y frondosos passeos; no por su deliciosa, y fertilissima huerta; no por la vistosa primavera de sus Jardines; no por el admirable Lago, ò gran Pantano, que fecunda sus campos; no por sus caudalosos rios, que la coronan; no por sus bien dispuestas, y dilatadas Calles; no por la hermosura de sus vastas plaças; no por lo inaccessible de sus eminẽtes Torres; no por la maquina estructura de sus edificios; no por sus magnificos, y sumptuosos Tẽplos; no por la maravillosa disposicion, y arte de su bella juvẽtud; ni tampoco lo agradable, y discreto de su generosa Nobleza; si *celebre* en todo el ambito de la tierra, por lo prodigioso, que encierra de singular, y peregrino; digo por vuestro primoroso, y devotissimo Santuario, portento de continuados milagros,) saludè con humildad atrevida, vuestra *Columna*, solo à fin de dar por bien el estruendo Militar de la guerra, pues me alcançò su exercicio, lo que sin èl ignorava, y haziendo escala de este empleo para agradeceros, el ver logrado mi trabajo, à este obsequio me empeña. Assi aora, sin interes pretendo abrir Academia de Mathematicas en Zaragoza, porque no correspondiera liberal â mi estudio, si pretendiera los premios, en meritos tan de gracia: Gracia vuestra serâ, y favor mio admitir à vuestros pies aquesta pequeña obra, que por deuda, y por amor mi rendimiento os ofrece, esperando deber à vuestra gracia, y à vuestro amparo, ver logrado mi deseo en la Academia, la Juventud empleada, mi Rey servido, y Dios, y vuestro nombre loado eternidades de gloria.

Soberana Emperatriz.

Humilde esclavo vuestro.

Que vuestra Columna humilde adora.

D. Antonio Joseph Deu y Abella.

APROBACION

DEL MUY REVERENDO PADRE MAESTRO FRAY JUAN *Seyra, y Ferrer, Doctor en Sagrada Theologia: Maestro en Philosophia: Ex Cathedratico de la Universidad de Huesca: Theologo del Legado Apostolico: Examinador Synodal de la Nunciatura de España, del Arzobispado de Zaragoza, y del Obispado de Jaca: Regente de los Estudios, que fue, y Prior del Real Convento de Predicadores de Zaragoza.*

OBedeciendo el mandato del muy Ilustre señor Doctor D. Fermin de Charola, Maestre de Escuela de la Santa Iglesia Metropolitana, y Vicario General del Arzobispado de Zaragoza, he visto este libro *Euclides, Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos.* Compuesto por Don Antonio Joseph Deu y Abella, en que suponiendo su habilidad, demuestra vn generoso corazon, pues à demas de costear la impression, se ofrece gratuitamente à enseñar las Mathematicas, en vtilidad del bien publico.

Las Mathematicas, que tuvieron su principio en los primeros hombres del Mundo, Adan, Noe, Abran, &c. se merecieron grande estimacion en todas las Naciones, y las han apreciado por vtiles, y convenientes todos los mas politicos, y mucho mas los Soberanos, por sus admirables efectos. Entre los Egypcios, los que se avian de crear assi Sacerdotes, como Pontifices, avian de ser Mathematicos. Los Persas procuravan, que la eleccion de Rey, recayesse en Mathematico. Los Reyes de Macedonia por sus assistentes, buscavan siempre Mathematicos. De Aristoteles Principe de la Philosophia, se refiere, que escrivió à Alejandro Magno, esta gentil carta: *O Rex clementissime, nec surgas, nec sedeas, nec cibum sumas, aut potum, penitusque nihil sine periti Mathematici consilio (si fieri potest) facias.* Clavio. Y aun las hallemos de Dios aprobadas: Porque diziendo el cap. 11. de la Sabiduria: *Omnia in mensura, & numero, & pondere disposuisti.* Los que escriven de Mathematicas, reducen à estos tres terminos todas sus especies; y con superior respecto, dize mi Angelico Doctor Santo Thomas, que à la Trinidad Santissima: *Reducantur.* 1.p.q.45 ar. 7.

La intencion del Autor es muy loable, pues es instruyr en estas Facultades à la juventud. Esta con la fogosidad de la sangre està propensa continuamente à cosas menos decentes, y como las Mathema-

ticas dulcemente atrahen à la voluntad, serà facil con su estudio, huyr de lo menos decente, y peligroso, y seguir lo mas vtil, y conveniente. Escribiò el Apostol San Pablo à su discipulo Thimoteo, que
2. Tim. 2 era joben, *Invenilia autem desideria fuge*, y Santo Thomas diò en el motivo, *Iuvenilia desideria hæc sunt: desideria vanitatum exteriorum, &
S. Thom. carnalium voluptatum. Naturale enim est iuvenibus, quod hæc desiderent.* Aplicada la jubentud à este estudio, podrà facilmente huyr todos los deseos inutiles, y aun pecaminosos, y abrazar las virtudes, y perfecciones, y singularmente ordenando la intencion à Dios Nuestro Señor, y acudiendo al patrocinio de la Virgen Santissima de el PILAR, à quien està dedicado este Libro.

Para que esta voz *Maria*, signifique à la Reyna de los Angeles, y Madre de Pecadores; todo el acento, y virtud se halla en la letra (I)
Pierio apud Cartag. que *habet formam Columnæ*; y el mas seguro asilo hallaràn todos en el PILAR, ò COLUMNA, que colocaron los Angeles, y sobre ella la Sacratissima IMAGEN, en el año 39. del Nacimiento del Verbo
Marc. l. 2. hom. 6. Divino, quando MARIA SANTISSIMA, VIVIENDO AUN EN CARNE MORTAL, vino desde GERUSALEN A ZARAGOZA, acompañada de inumerables ESPIRITUS CELESTIALES à visitar A SANTIAGO, (à quien todos los Españoles estamos muy obligados) el qual assistido de ANGELES, por mandado de esta SEÑORA, fabricò la SANTA CAPILLA, primera en todo el ORBE, en honra, y gloria de esta CELESTIAL REYNA: *Optime meretur de*
Buçel, t. 2. sacra histor. *Hispanis Sanctus Jacobus, & primam in Orbe, sub honore Dei parentis condidit Ecclesiam Cæsaraugustæ*, que dize vn Autor Aleman.

Ni dexaràn de conseguir los estudiosos los benevolos influxos de esta Señora para la sabiduria, porque venerada en el Santo PILAR, como Mar inmenso de gracias, difunde liberal los cristalinos raudales de la sabiduria mas saludable. Con la agitacion de los vientos se levantan las aguas del Mar en montes liquidos, y humidos de cristales, formando diversas figuras; entre otras forman vna, la mas benefica, porque como refiere Plinio, *de ella sacan las nubes abun-*
Plinio l. 2. cap. 49. *dantes aguas con que fertilizan, y enriquezen la tierra.* La agua es la sabiduria saludable. *Aqua sapientiæ salutaris.* El Mar es Maria Santissima, y aquel promontorio de aguas: *Vocatur, & Columna*;
Eccl. c. 15. es MARIA en su PILAR. La tierra es el hombre, *Terra es.* Luego en la Virgen Santissima de el PILAR hallaràn todos los influjos benevolos, y abundantes para adornar su espiritu con sabiduria, y enriquecer su alma con virtud.

De todo lo dicho se infiere, que este Libro nada tiene contra

tra Santa Fè Catholica, y buenas costumbres, antes bien puede ser muy util, y provechoso. Assi lo siento en este Real Convento de Predicadores de Zaragoça à 20. de Junio del año 1723.

Fr. Juan Seyra, y Ferrer.

LICENCIA DEL ORDINARIO.

NOS EL Dr. D. FERMIN JOSEPH DE CHAROLA, MAESTRE Escuela, Dignidad de la Santa Iglesia Metropolitana Zaragoçana, y en lo Espiritual, y Temporal, Provisor, y Vicario General de este Arçobispado, por el Illustriss. señor D. Manuel Perez de Araziel y Rada, mi señor, por la gracia de Dios, y de la Santa Sede Apostolica, Arçobispo de Zaragoça, del Consejo de su Magestad, &c. Por la presente, y por lo que à Nos toca, concedemos nuestra licencia para que se pueda imprimir el Libro: *Euclides, Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos*, escrito por Don Antonio Joseph Deu y Abella, Covernador que fue de la Ciudad de Castillo Aragonès, y Capitan agregado al Estado mayor de esta Ciudad, atento à que de nuestra orden ha sido visto, y reconocido, y no contenerse en èl cosa que se oponga à nuestra Santa Fè, y buenas costumbres. Dada en Zaragoça à 21. de Junio de 1723.

D. Fermin Joseph de Charola
Vic. Gñl.

Por mandado del señor Vicario Geñl.

Juan Miguel de Grassa, Not.

 APRO-

APROBACION DE D. FRANCISCO MAULEON, Brigadier, é Ingeniero Director de los Exercitos de su Magestad, fortificaciones de sus Plazas, y demàs puestos de guerra de sus Reales Dominios.

POR Comission de V. A. he visto con toda atencion el Thomo de Geometria especulativa, y practica de los seis primeros Libros de los Planos, y onze, y doze de los solidos de Euclides, que ha compuesto D. Antonio Joseph Den y Abella, Governador que fue de la Ciudad de Castillo Aragonès, y Capitan agregado à la plana mayor de Zaragoza, demostrando en èl toda la theorica, que Euclides con su orden, en tantas proposiciones nos enseña, por otro nuevo orden, (à imitacion de el Padre Joseph Zaragoza) que en pocas proposiciones, con gran claridad, y facilidad demuestra brevemente todo lo especulativo, que en esta Noble, y Divina Ciencia se puede comprehender, sin que quede parte, que con evidencia no se halle en lo discursivo, y practico de todo lo importante, y essencial de el bien comun, que con la grande aplicacion de los estudios de esta profession, con tantos trabajos ha podido comprehender este Autor; siendo assi, que como los Elementos en lo phisico, son el fundamento de la vida, en esta Ciencia, son la vida de la Mathematica, porque todas las partes de ella se demuestran por sus proposiciones; y de esta pura verdad se componen las operaciones de la Geometria practica, por las que con verdadero co-

no-

nocimiento, y acierto, son sus lineas el blanco de toda la vtilidad comun, para el acierto del governar, desde el mas poderoso Monarca al inferior Vassallo. Siendo esta Ciencia tambien precisa para todo el beneficio de las demas Ciencias, y siguiendose tanta vtilidad al servicio de su Magestad, y al bien publico, assi por tener este volumen la grandeza de esta Noble Ciencia, se tiene tambien la de hallar en èl vna brevedad, y facilidad de todo lo demostrativo, comprehensible en la Geometria: Por lo que considero importante, que se imprima el expressado Libro. Assi lo siento, Zaragoça Junio 9. de 1723.

D. Francisco Mauleon.

LICENCIA DEL CONSEJO.

DOn Baltasar de S. Pedro Azebedo Escrivano de Camara del Rey Nuestro Señor, y de Govierno del Consejo, certifico, que por los Señores de èl se ha concedido licencia por vna vez al Capitan D. Antonio Joseph Deu y Abella, para que sin incurrir en pena alguna, pueda imprimir, y vender vn Libro, que ha cōpuesto, intitulado: Euclides, Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos, guardando en su impresion lo dispuesto por las Leyes, y pragmaticas, que sobre ello tratan, y que antes que se venda el dicho Libro, se trayga ante los dichos Señores del Consejo, juntamente con certificacion del Corrector, de estar conforme a su original, para que se tasse el precio à que se ha de vender, y para que conste lo firmè en Madrid à trece de Junio de mil setecientos, y veinte y tres.

D. Baltasar de S. Pedro.

Por el Secretario Bordonava.

ERRATAS.

pag	lin	error	correcciõ	pag	lin	error	correcciõ
1	2	filosofia	Philosophia	25.	19.	DC.	AC.
1	6	filosofos	philosophos	26.	13	si los	si dos
1	11.	filosofica	philosophica	30.	20	HFE.	GFE.
3	5	ciencia	es ciencia	32.	12	figura	fi.3.l.1.cas.
4	2	por sutileza	por su sutileza	37.	1.	à T.	AT.
4	7	filosofia	philosophia	38.	4.	HS.	AS.
4	7	Mathematico	Mathematica	38.	20.	y E —N.	por E— N.
5	12.	(3. X. 2.)	(3.×.2.)	43.	20.	AH.	HD.
7	26.	ef.	EF.	43.	28.	(fig.1.l.3.)	(fig.1.l.1.)
7	27.	l 25.	las	43.	31.	(fig.1.	(fig.1.l.1.)
8	19.	si AB.	si ACB.	46	13.	HOG.	AOG.
9	24.	EOC.	AEF.	49	28.	rectos	rectas (os)
9	35.	igualmete	igualmente	50	6.	iguales NB	iguales radi
11.	21.	BG.	Bg.	52	4.	angulo G E	GCE.
12.	30.	rectas	rectos	52	4.	arco CFE.	GFE.
14.	6	AEF.⌒	AEF + FEB.	55.	28.	fuerae	fueran
15.	13.	= Es	Es	61.	18.	LIB.15.	LIB.5.
15.	16.	2.	3.	69.	18.	à 64.	
17.	3	+ sus	+ L.	70.	25.	2 à 8.	8. à 2.
17.	7	LBC.⌒	LBC + LCB.	79.	2.	D.— E.	D. + E.
18.	25.	diviere	dividiere	86.	30.	lados	dados
18.	29.	(n.1.prop.	n.1.y (prop.	90.	30.	end.	cnd.
20.	13.	Y.	9.	94.	21.	(h)43.l.6.	(h) 43.l.1.
20.	19.	Ae.	Ao.	96.	36.	zmb.	zmh.
20.	19.	CAe.	CAo.	96.	36.	zhc.	zhi.
23.	10.	recta,	resta	97.	2.	zib.	zlb.
25.	28.	mejor	mayor	97.	8.	10.	ie
25.	19.	DG.	DC.	101.	3.	àLX.	ALX.
				101.	15.	en los	de los

pag.

pag	lin	error	correcciõ	pag	lin	error	correcciõ
202.	7.	DF.	EF.	150.	17.	pract.1.	pract.4.
106.	32.	Tetraedo	tetraedro	150.	21.	n. 1.	(2.l.6.n.2.)
113.	3.	AGC.	à GC.	152.	22.	el	al
113.	23.	(b) 16.l.11.	(b) 19.l.11.	153.	9.	y el que	es el q̃ (co
114.	19.	(2.l.11.n.5.)	(1.l.11.4.)	155.	3.	se multipli-	si multipli-
115.	21.	GD.	GE.	155.	24.	ò vno	à vno
119.	33.	CE.	CG.	156.	13.	(fig.3.	(fig. 4.)
120.	14.	en las	las	159.	27.	(def.39.l.11)	(def.9.l.11)
123.	29.	(b) 16.l.12.)	(b) 18.l.12.	162.	4.	$\frac{27360.}{10000.}$	$2\frac{7360.}{10000.}$
124.	2.	(c) 27.l.11.	(c) 37.l.11.	162.	12.	$\frac{27322.}{10000.}$	$2\frac{7322.}{10000.}$
127.	10.	PQZ.	PQX.	163.	15.	$\frac{65000.}{10000.}$	$6\frac{5000.}{10000.}$
127.	10.	p.q.x. â q.x.z	pqx. à qxz.	163.	16.	$\frac{65000.}{10000.}$	$8\frac{5000.}{10000.}$
128.	21.	solidos	solidez	165.	10.	planos	palmos
131.	33.	D. ⊓ A.	D ⊓ A.	165.	25.	24619.	14619.
133.	31.	(def.26.l.6.)	(def.2.l.6.)	170.	26.	$117\frac{80000.}{10000.}$	$117\frac{8000.}{10000.}$
134.	12.	dadadas	dadas	171.	5.	§.10.	§.16.
134.	17.	fig.1.y 6:	fig 6. (ra	173.	24.	$121\frac{120}{96.}$	$121\frac{96.}{120}$
136.	16.	semejante	semejãte à ot	152.	2.	ponen	pone.
140.	23.	GAD.	GAB.				
140.	29.	BNH.	BNA.				
142.	7.	BA.	DA.				
143.	13.	(b)	(b) 2.l.4.				
143.	20.	4.(h)	5.(h) (no				
143.	20.	quindexago.	quindezago-				
144.	32.	(15.l.1.n:5.)	(5.l.1.n.5.)				
145.	3.	media	medida				
147.	6.	AB.	Ab.				
149.	11.	BE.	DE.				

La figura 8. del problema 2. se ha de mirar al reves de la estampa, esto es, lo de arriba á abajo, ó lo de abajo arriba, por estar las letras abiertas al reves.

FI.

EL Libro intitulado Euclides, Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos su Autor D. Antonio Joseph Deu, y Abella, Governador, que fue de la Ciudad de Castillo Aragonès, y advertiendo estas erratas, corresponde al que le sirve de original. Madrid, y Julio 2. de 1723.

Licenciado D. Benito de Rio Cao de Cordido, Corrector General por su Magestad.

TASSA.

DOn Balthasar de San Pedro Azevedo Escrivano de Camara del Rey Nuestro Señor, y de Govierno del Consejo. Certifico, que aviendose visto por los señores de èl, el Libro intitulado Euclides, Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos, su Autor Don Antonio Joseph Deu, y Abella, que con licencia de dichos Señores, ha sido impresso, le tassaron à ocho maravedis, de vellon cada pliego, que parece tiene, veinte y dos pliegos, sin principios, ni estãpas, y à dicho respecto monta ciento y setenta y seis maravedises, de vellon à cuyo precio mandan se venda, y que esta certificacion se ponga al principio de cada Libro, para que se sepa, el precio à que se ha de vender, y para que conste, lo firmè en Madrid à primero de Julio de mil setecientos y veinte y tres.

D. Balthasar de S. Pedro.

Por el Secretario Bordonava.

LI-

INDICE DE LOS TITULOS QUE EN ESTE Tomo se contienen.

M

INTRODUCCION DEL AUTOR.

DEspues de averse no poco fatigado el gran Maestro de la Filosofia Aristoteles, de investigar las causas de los secretos naturales, no aviendo podido conseguir la noticia sino de vnas pocas, exclamò diziendo: *Felix qui potuit rerum cognoscere causas.* Por cuyo motivo, sin duda debieron dedicarse, no solo muchos Filosofos antiguos, y modernos; sino muchos Principes, Monarcas, y Emperadores, al estudio de la nobilissima facultad de las Mathematicas, considerando, que sin esta, mal se podrian averiguar los muchos, y grandes arcanos de la naturaleza. Cuya verdad parece aver confirmado el excelente Platon, excluyendo de su filosofica Academia a todos los que ignoraban la Geometria. Siendo pues esta tan necessaria, y provechosa a todo el vniverso, y la que ocupa el primer lugar en el Curso Mathematico, abriendo zanjas a las demas materias. Es mi cuydado, no solo explicarla en este volumen con la brevedad, y claridad que sea posible; tratando primero de la especulativa, y despues de la practica, ò antes de los theoremas, y despues de los problemas, por depender estos de aquellos, y no lo contrario; sino tambien abrir publica Academia para exercicio de la noble jubentud Zaragoçana, sin interès alguno.

Reduzgo las materias a clases, juntando en vna, todas las que son de vna especie, segun el methodo del Padre Joseph Zaragoza de la Compañia de Jesus, consiguiendose con esto, no solo que las proposiciones, y figuras sean menos, sino que tambien se socorre a la memoria de lo que cada libro contiene, y se facilita la enseñança con brevedad. Pero porque con este artificio aunque se observe el orden de los libros de Euclides vulgar, no se observa el de sus proposiciones, para mejor comprehenderlas, pondrè à la margen de cada libro las proposiciones de Euclides, correspondientes a las de este, a fin de que no tenga el principiante dificultad en las citas de los Autores: y las que no se pusieren las dexo de intento, por no ser necessarias, y estar embevidas en las citadas.

En los proemiales se hallaràn la definicion, y division de la Mathematica; la explicacion de algunas vozes, que los mas de los Authores no las explican; la explicacion de los signos Analiticos; y los Axiomas. Las demas definiciones se ponen al principio de cada libro, segun la serie de las materias que contiene; al fin de cada proposicion, demuestro vn theorema de los contenidos en ella con estilo Analitico; y al vltimo de esta obra, se pone vna breve suma de las reglas geometricas, que dicho Zaragoça pone en su Algebra, que con ellas podran los Arquitectos sin ser geometras, facilmente medir, reducir, aumentar, y disminuyr qualquier genero de figuras, tanto planas, como solidas; teniendo empero, vna mediana noticia de la Aristhmetica.

Para la mayor inteligencia de este Euclides, pareciome mejor, como dixe, seguir en todo el methodo del Padre Joseph Zaragoza, y no inventarle de nuevo; porque con aquel me podrè assemejar a las Abejas, que chupando flores de agenos jardines, forman apreciables panales; y con este, me assemejaria a las Arañas, que despues de averse desentrañado, ò su labor es nada, ò de ningun provecho. Y pues el estilo es facil, claro, y compendioso; y la facultad tan necessaria, provechosa, y deliciosa, no serà malogrado el tiempo, que en su estudio se consumiere, ni en vano el sudor, que en aprenderla se empleare.

Explicacion de las citas.

(14.p.) quiere dezir, proemial catorce, (def.3.l.1.) quiere dezir, definicion tres del libro primero, (1.l.2.n.1.) quiere dezir, proposicion primera del libro segundo, numero primero, (7.p.2. consec.1.) quiere dezir problema septimo practica segunda, consectario primero, (prob.3.n.2.) quiere dezir, problema tercero, numero segundo.

PROEMIALES.

1.p. El total conocimiento de todas las ciencias depende de sus definiciones; y siendo la Mathematica, entre todas las Ciencias naturales la que mas satisface al humano apetito: pues no solo las excede, sin comparacion, en la limpieza de sus verdades, en la energia de sus pruebas, en la claridad de sus demostraciones, y necessarias consequencias, no llegando a ella aquellas nieblas, que suelen obscurecer el resplandor de las otras facultades, sino que desciende de

su

ſu levantada eſfera luces tales, que deſcubren ſendas a las otras Artes naturales para ſu acierto: Luego conſentaneo ſerà, que para ſu inteligencia la definamos.

2.p. Es pues la Mathematica *en comun, ciencia de la quantidad inteligible.* Eſto es, de laquantidad, en quanto es menſurable, ò numerable, capaz de aumento, ò diminucion, y que comparada con otra de la miſma naturaleza, ſe puede llamar *igual, ó deſigual, mayor, ó menor*, como es *el eſpacio, el numero, la gravedad, la celeridad, el ſonido, &c.*

3.p. Se divide la Mathematica en pura, y no pura; la Pura ſe divide en Geometria, y Arithmetica: La Geometria *en comun, es ciencia de la quantidad continua, cuyos terminos eſtan continuados, y unidos, aunque ſea con imaginaria union en las partes del eſpacio imaginario.* Llamaſe tambien elementar, por la facilidad de ſus propoſiciones, pues de eſtas ſe infieren las mas dificiles. Divideſe la Geometria en *eſpeculativa, y practica, ó en theoremas, y problemas. Los theoremas ſon aquellas propoſiciones eſpeculativas, que expreſſan las propiedades de alguna coſa*, como ſon todas las propoſiciones del tratado de laGeometria eſpeculatiba de eſte tomo: los Problemas ſon aquellas propoſiciones, ò queſtiones, en que ſe propone executar alguna coſa, con alguna, ò algunas condiciones, demoſtrando la practica, y modo de hazerla, y diſponerla, ſegun los principios previamente zanjados, como ſon todos los problemas del tratado de la Geometria practica.

4.p. La Arithmetica *es ciencia de la quantidad diſcreta, cuyos terminos no tienen union, como ſon los numeros.* De eſta depende la Trigonometria, cuyo exercicio es reſolver triangulos, aumentando la facilidad de ſus operaciones, la logarithmica, que trata de numeros artificiales, que no poco han enriquecido el Orbe literario. Se divide la Arithmetica en menor, y mayor. La menor exercita ſus operaciones con el algorithmo comun; trata de la proporcion, aligacion, falſas poſiciones, progreſſiones, y combinaciones, y de todo quanto las reglas de ſumar, reſtar, multiplicar, y partir, pueden reſolver ſin otro artificio. La mayor ſube a las poteſtades numericas, examina ſus compoſiciones, inquiere ſus raizes, como principal fundamento del Algebra, a quien llamaron los antiguos (por ſutileza) divina ciencia.

5.p. La *Mathematica no pura, o phiſica Mathematica es la que conſidera la quantidad veſtida, y acompañada de algun accidente, ó affeccion ſenſible*; y porque las afecciones ſenſibles ſon propias de la Philoſofia, ò Phiſica: ſe llama no pura, ò Phiſico Mathematico. Cuyas materias, ò tratados en que ſe divide eſta Mathematica, los podrà ver el curioſo en los Autores de eſta profeſſion, principalmente en el Padre de Chales.

EXPLICACION DE ALGUNOS TERMINOS.

6.p. Los terminos ſon los ſiguientes: Definiciones, Axiomas, Poſtulados, Propoſiciones, Theoremas, Problemas, Lemas, Corolario, ò Conſectario, Scolio, è Hypotheſis,

Definiciones, ſe toman aqui por las explicaciones de los nombres, y terminos, y aſſi por eſte nombre *quadrilatero*, entendemos vna figura de quatro lados.

Poſtulados, ó Peticiones, ſon vnos principios, en que ſe pide hazer lo que manifieſtamente ſe conoce que puede hazerſe: Como *de qualquier punto á otro punto ſe puede tirar linea recta.*

Axiomas, ó nociones comunes, ſon vnas verdades tan ciertas, tan claras, y evidentes, que ſolo proponerlas es obligar al entendimiento a confeſſar ſu verdad, como es: *el todo es mayor de ſu parte.*

Propoſicion, es nombre general, y ſignifica aqui qualquiera concluſion de la ciencia que proponemos para probarla por ſus principios. De las quales vnas ſon Theoremas, y otras Problemas, que ya ſe explicaron arriba.

Lema, es vna propoſicion menos principal, y como acceſſoria, ò ſea Theorematica, ò Problematica, que conduce para demoſtrar la propoſicion, que principalmente ſe buſca, ò ſe ſigue.

Corolario, ó Conſectario, es vna propoſicion, que por legitima conſequencia ſe infiere de lo ya demoſtrado.

Scolio, es vna anotacion, que ſe añade algunas vezes, al fin de alguna propoſicion, para mayor explicacion ſuya, ó para mayor extenſion de lo que en ella ſe enſeña, que es lo miſmo, que reflexion, ò advertencia.

Hy-

Hypothesis. es vna declaracion de lo que ſe propone en el titulo.

Explicacion de los Signos Analyticos.

8.p. Los Signos de q̃ ſe ſirven los Mathematicos ſon los ſiguientes: (+) quiere dezir, *mas*; (—) quiere dezir, *menos*; (∽) ſignifica *igual*; (≃) ſignifica, *ſemejante*; (=) ſignifica *igual*; (+ q.) ſignifica, *mas que*; (— q.) ſignifica *menos que*

Los terminos proporcionales no continuos ſe expreſſan del modo ſiguiente: Como 2 :: 4 :: 3 :: 6; y tambien aſſi: $\frac{2}{4} \simeq \frac{3}{6}$

Los proporcionales continuos ſe expreſſan aſſi. ÷ 2. 4. 8. y tãbien del modo ſiguiente: $\frac{2.}{4.} \backsim \frac{4.}{8.}$ Eſte Signo (X) ſignifica *multiplicar*: Como (3. X. 2.) quiere dezir, que *el tres ſe multiplica por el dos.*

AXIOMAS.

9.p. El todo compueſto de muchas partes, es igual a todas ſus partes juntas, porque ſe compone de ellas, y es mayor que cada parte ſola, porque incluye por lo menos otra parte mas.

10.p. Las partes ſemejantes, y de vna denominacion, ſon iguales entre sì, como vna mitad a otra, vn tercio a otro, &c. ſi ſon de vn miſmo compueſto, y tambien de dos todos iguales; pero ſi dos compueſtos todos ſon deſiguales, el mayor tiene mayores partes, y al contrario: y aſſi la mitad del Cielo es mayor q̃ la mitad de la tierra.

11.p. Las quantidades, que ſon iguales a otra, ò que la contienen ò ſon contenidas de ellas iguales vezes, ſon tambien iguales entre sì. Lo miſmo es reſpecto de otras dos iguales.

12.p. Las quantidades que tienen vn miſmo, ò igual exceſſo a otra, y a dos iguales: Y las que ſon igualmente excedidas de otra, y de dos iguales, ſon tambien iguales entre sì.

13.p. Lo que ſe dize de vna cantidad reſpecto de otra, como que es mayor, menor, ò igual; dupla tripla, &c. mitad, tercio, quarto, &c. ſe dize tambien de otra ſu igual.

14.p. Vna quantidad ſe ajuſtà al lugar de otra, quando pueſta en ſu lugar, le ocupa enteramente; y aſſi las quantidades, que ſe ajuſtan

ſon

ſon iguales; pero por ſer iguales no ſe ajuſtan, ſino quando ſon ſemejantes,ù de vna miſma eſpecie;como vn circulo igual a otro,y vn arco a otro de vn miſmo,ò igual circulo,vn quadrado a otro,&c. Pero ſi las cantidades no ſon de vna miſma eſpecie,aunque ſean iguales, no ſe ajuſtan:como vn quadrado no ſe ajuſta con vn triangulo, aunque ſean iguales,por no ſer de vna miſma eſpecie.

15.p. Si a cantidades iguales ſe añaden, ò quitan cantidades iguales, ò vna comun a las dos,reſultan cantidades iguales.

16.p. Si a cantidades iguales ſe añaden,ò quitã deſiguales,quedarã deſiguales,y ſerà mayor aquella a quiẽ ſe añadiò mas,ò quitò menos.

17.p. Si a deſiguales ſe añaden,ò quitan iguales,ò vna comun,quedaràn deſiguales,y ſerà mayor la miſma que antes era;y ſi ſe añaden deſiguales,quedarà mayor la que era mayor por el aumento mayor, y la cantidad menor quedarâ menor,por el aumento menor.

18.p. Si de tres cantidades,la primera es mayor, que la ſegunda; y la ſegunda,que la tercera; tambien la primera ſerà mayor , que la tercera, y al contrario.

19.p. Los perpendiculos entre dos paralelas ſon iguales.

DEFINICIONES DE EL LIBRO I.

De la Magnitud.

1. *Magnitud.* ò grandeza, es vna cantidad continua menſurable: Si es finita,y terminada,ſus terminos ſon los eſtremos de la magnitud (del continuo 3.p.)

2. *Punto* Mathematico,en la magnitud,es vn ſigno,ò ſeñal indiviſible, ſolo por ſupoſicion , y conſideracion de el entendimiento.

Se divide la magnitud en linea,ſuperficie,y cuerpo,ò ſolido. Eſte vltimo ſe definirá en ſu lugar.

DE LA LINEA.

3. *Linea*,es vna magnitud larga,ſin anchura,ni profundidad;porque ſe imagina formada con el movimiento de vn punto indiviſible, con que ſe ſigue, que no tiene ſino vna dimenſion. La linea ſe divide en recta,y curba.

4. *Linea recta*,es la que directamente procede ſin jamas torcer a vna,ni otra parte: y ſi es finita , procede igualmente entre los dos pun-

puntos, que son sus terminos: Con que de vn punto a otro solo se puede tirar vna linea recta, pero esta se puede continuar infinitamente, y es la mas breve distancia entre ellos.

5. *Linea curba*, es la que no procede directamente, y tuerce a vna ò a otra parte, como es la circular, y otras.

De la superficie.

6. *Superficie*, es vna magnitud de dos dimensiones, larga, y ancha, sin profundidad, cuyos extremos son lineas. Imaginase compuesta de lineas, y si todas por todas partes son rectas, ò si vna regla bien recta, dando vna buelta por todas partes, se ajusta con la superficie, serà superficie plana; sino serà curba, ò mixta de plana, y curba.

DEL CIRCULO, Y SU DIAMETRO. *fig. 1. lib. 1. caso 1.*

Aunque las definiciones del Circulo pertenezcan al lib. 3. no obstante es precisso hazer alguna mencion en este parage, para la inteligencia de los Angulos.

7. *Circulo*, es el espacio, que la linea circular, ò ambito, ò peripheria, ò circunferencia, comprehende, ò ciñe. El centro es el punto medio, que igualmente dista de la circunferencia. Se divide el circulo en 360. partes, su mitad 180. y su quarto 90.

8. *Diametro*, es la recta, que passa por el centro, y se termina en la circunferēcia, por vna, y otra parte. Todos los diametros son iguales, porque se componen de dos radios iguales; y qualquier diametro divide el circulo en dos partes iguales: porque si la mitad del circulo ADB. se dobla sobre la otra mitad ACB. se ajustaràn (14. p.) y tirando infinitos radios, como EC. EF. todos por ser iguales, se terminaràn en las dos circunferencias; porque si alguno cayere fuera seria mayor, y si dentro menor.

DEL ANGULO Y SU MEDIDA. *fig. 1. lib. 1. cas. 1.*

9. *Angulo plano*, es la inclinacion de dos lineas, como ABC. quando solas dos lineas concurren, se puede nombrar el angulo con la letra sola del concurso, como el angulo B. pero quando concurren tres, ò mas lineas en vn punto, se debe nombrar con tres letras,

y la del concurso debe ponerse en medio: como el Angulo FEB. es el mismo que BEF. y el angulo FEC. el mismo que CEF. Aunque las lineas sean cortas, ò largas, no mudan el angulo, porque no se muda su inclinacion; y assi el angulo AB. C. es el mismo que EBO.

NOTA.

El Angulo por razon de inclinacion de las lineas, se divide en Recto, Obtuso, y Agudo; y tambien por razon de las lineas que le formã, se divide en rectilineo, curvilineo, y mixtilineo. Antes de difinir estos angulos, hemos de difinir primero sus medidas.

10 *Medida* del angulo es el arco, que se imagina descripto del pũto del concurso como centro, y se comprehende entre las dos lineas que forman el angulo: Como si del punto E. se descrive qualquier circulo; el arco CB. serà medida del angulo CEB: Con que si dos angulos CEB. AED son iguales, seràn los arcos de vno, ò iguales circulos CB. AD. tambien iguales; y los de circulos desiguales, seràn semejantes. Y si los arcos son iguales, ò semejantes, seràn los angulos iguales; si el arco AC. es de 90. grados, serà el angulo AEC. de 90. grados; y si AB. de 180. grados, los angulos BEF. y FEA. juntos valen dos rectos, y es la abertura maxima del Compàs. De que se infiere, que por el punto E. àzia la misma parte, solo vna recta EA. puede formar el mismo angulo; porque como ha de cortar el arco AC. y passar por A. necessariamente serà la misma linea EA.

11 *Angulo recto*, es el que comprehende la quarta parte de vn circulo, ò mitad del semicirculo, que son 90. grados. Todos los Angulos rectos son iguales entre sì, por ser cada vno la quarta parte del mismo circulo, y dos angulos rectos son 180. grados, que es el semicirculo. *def.* 7.

12 De que se infiere, que la linea que es perpendicular a otra, es la que con ella haze dos angulos rectos, y la que parte el semicirculo en dos partes iguales: Como si del centro E. sube la linea EC y los arcos CB. CA. son iguales, seràn los angulos AEC. CEB. rectos iguales, y la recta EC. serà *perpendicular*, sobre AB. porque no se inclina mas a vna parte, que a otra; y assi la perpendicular de vn punto es vnica.

13 *Angulo obtuso*, se dize el que es mayor que recto. De que se in-

infiere, que es mas de 90. grados, como FEA. porque el arco FA. es mas que el quadrante AC.

14. *Angulo agudo*, se dize el que es menos que recto. Como FEB. porque el arco BF. es menos, que el quadrante BC. y porque tanto el angulo *obtuso*, como el *agudo*, no son rectos, se llaman *obliquos*.

15. *Angulo rectilineo*, es el formado de lineas rectas. *Curvilineo*, es el formado de lineas curvas. El *Mixtilineo*, es el formado de vna recta, y de otra curva; y se llama de la *contingencia*. El angulo agudo respecto del obtuso, ò al contrario, con quien iguala el valor de la abertura maxima del compas, ò de 180. grados, se llama Angulo *de inceps*.

DE LOS TRIANGVLOS, (*fig. 1. lib. 1. caso 1.*)

16. *Figura*, es vna cantidad cerrada con mas de dos lineas. De que se sigue, que dos lineas no cierran espacio, ni hazen figura.

17. *Triangulo*, es vna figura de tres angulos, y porque tiene tambien tres lados, se llama figura trilatera.

18. *Triangulo rectangulo*, es el que tiene vn angulo recto. Como el triangulo CEB.

19. *Triangulo* obliquangulo, es el que no es rectangulo, y tiene tres angulos obliquos. Como son CEO. OEB. y comprehende tanto al obtusangulo, como al acutangulo.

20. *Triangulo obtusangulo*, ò Ambligonio, es el que tiene vn angulo obtuso, como EOC.

21. *Triangulo acutangulo*, ù Oxygonio, es el que tiene tres angulos agudos, como AEG. y BEO.

22. *Triangulo equilatero*, ò Isopluero, es el que tiene tres lados iguales, como AEG; y tambien es equiangulo.

23. *Triangulo isoceles*, es el que tiene por lo menos dos lados iguales. como CEB. y GEA. y por consiguiente dos angulos iguales.

24. *Triangulo escaleno*, es el que tiene tres lados desiguales, como CEO. y OEB.

DE LAS PARALELAS. (*fig. 2. lib. 1.*)

25. *Lineas rectas paralelas*, son las que infinitamente continuadas, siempre distan igualmente, y jamas pueden concurrir. Como si el triangulo ABC. se mueve sobre la linea AD. formarà con el

vertice la linea CCC. siempre equidistante de AD; y los lados BC. BC. BC. siempre seràn equidistantes, como tambien los lados AC. AC. AC. pues aunque estas lineas se continuẽ infinitamente en qualquier parte q̃ se tome el pũto C. siempre CC. caminò tãto como BB.

(a) 29. lib. 1. Eucl. *Corolario* 1. (a) Si vna linea DA. corta las paralelas BC. BC. ò AC. AC. entra en ellas con iguales angulos A. A. A. por ser vn mismo angulo del triangulo ABC. que solo mudò lugar con el movimiento, sin variacion de sus partes; y al contrario, si entra la DA. en las dos CA. CA. con iguales angulos A. A. seràn paralelas.

Corolario 2. las paralelas tienen el perpendiculo comun; y al contrario; porque si BC. BC. son paralelas, y la recta DA. que entra en ellas, es perpendicular, entra con iguales angulos (*corol.* 1.) y seràn rectos B. B. y al contrario, si AD. es perpendiculo comun â las rectas CB. CB. son estas paralelas, y los angulos B. B. rectos.

(b) 30. lib. 1. *Corolario* 3. (b) dos lineas BC. BC. son tambien entre sì paralelas, si en vn mismo plano son paralelas à otra BC. porque si à igual distancia se añade, ò quita igual distancia, resulta igual distancia (15. p.)

DE LOS PARALELOGRAMOS. (*fig.* 3. *lib.* 1. *casos* 1. 2. 3.)

26. *Paralelogramo*, es figura de 4. lados, y angulos, cuyos lados opuestos son entre sì paralelos, como OSHR. y GFBD. (casos 1. 2.)

Se divide el Paralelogramo en rectangulo, Rombo, y Romboyde.

27. *Rectangulo*, es paralelogramo de quatro angulos rectos, como OSHR. GFBD. (casos 1. 2.)

28. *Quadrado*, es rectangulo de quatro lados iguales, como ONMR. GECD. (casos 1. y 2.)

29. *Rombo*, es paralelogramo que tiene quatro lados iguales, y dos angulos desiguales, como QPXL. (caso 3.)

30. *Romboyde*, es paralelogramo que tiene dos lados, y dos angulos desiguales, como AZPQ. (caso 3.)

31. *Diametro* del paralelogramo, es la recta, que junta los angulos opuestos, como LP. DF. y RS. (casos 1. 2. 3.) llamase tambien Diagonal, ò Diagonio.

32. *Centro* del paralelogramo, es el punto comun de los diametros, donde mutuamente se cortan, como V. (caso 3.)

33. *Trapecio*, es aquella figura de quatro lados, que no es paralelogra-

gramo; y se nombra con todas las quatro letras de sus angulos, como ORCN. (caso 1.) ADVERTENCIA.

Los paralelogramos ya formados, se pueden nombrar con las quatro letras de los angulos, y para mas compendio, se nombran con las dos letras de los angulos opuestos, que siempre son iguales, como el paralelogramo OSHR. puede nombrarse OH. ò RS. (caso 1.)

34. *Figura rectilinea*, es aquella, que està comprehendida de lineas rectas, como en los (casos 1. 2. 3.)

35. *Figura trilatera*, es la que consta de tres lados, como es el triangulo ORS. (caso 1.)

36. *Figura quatrilatera*, es la que consta de 4. lados, como OSHR. (caso 1.)

37. *Figura multilatera, ò polygono*, es la q̃ consta de mas de 4. lados.

38. *Figuras isoperimetras*, son aquellas de diversa especie, cuyos lados, ò perimetros son iguales. Esto es, que puestos los lados de cada figura en lineas rectas, sean estas iguales. Aunque no por esso se infiere ser iguales las superficies, que comprehenden dichos lados, v. g. (fig. 10. lib. 1. caso 2.) tirese la GL. paralela à CF. (prob. 1. nu. 4.) que corte el lado AZ. en Z. igual al lado AC. El paralelogramo AL. serà igual al paralelogramo BG. (8. lib. 1. num. 3.) y no à BC. en medio que vno, y otro tienen los lados iguales, pero no son de vna misma especie. De que se infiere, que quando los lados de los paralelogramos, ò figuras regulares son iguales, y no los angulos, los que tienen los angulos rectos, tienen las superficies ciertas por el producto de los lados; è inciertas los que tienen los angulos obliquos; luego para que las superficies de estos sean ciertas, se han de reducir à rectangulos (prob. 6. num. 4.)

LIBRO PRIMERO DE EUCLIDES, DE LAS LINEAS, TRIANGULOS, Y PARALELOgramos.

AUnque Euclides reduxo la Geometria à 12. Libros, nosotros en este tomo, trataremos tansolamente de los seis primeros, que

que pertenecen a los planos, y de los dos vltimos, que pertenecen a los solidos; omitiendo los demas, por no servir sino de curiosidad. Y porq̃ tanto los seis libros de los Planos, como los dos de los Solidos, se dibiden en theoremas, y problemas, ò en geometrìa especulativa, y practica; explico primero la especulativa, y despues la practica, segun previne en mi introducion.

El que deseare aprobechar en la geometrìa, ha de aplicar su primer cuydado en saber la materia de cada libro, el numero de sus proposiciones, y lo que cada vna contiène, por ser de suma importancia para la inteligencia de las demostraciones. El primer libro del Euclides vulgar, contiene 48. proposiciones, esto es 14. problemas que se dexan para la Geometria practica, y 34. theoremas, que en este libro se reduzen à las 8. siguientes proposiciones.

PROPOSICIONES DEL LIBRO PRIMERO.

Prop. 1. *De las lineas, que concurren.*
Prop. 2. *De las paralelas.*
Prop. 3. *De los angulos de las figuras.*
Prop. 4. *De los triangulos en todo iguales.*
Prop. 5. *De las partes de vn triangulo.*
Prop. 6. *De la desigualdad de los triangulos.*
Prop. 7. *De los Paralelogramos en si mismos.*
Prop. 8. *De los triangulos, y Paralelogramos entre si.*

PROPOSICION PRIMERA.

DE LAS LINEAS QVE CONCVRREN.

1. *Los* (a) *angulos, que se forman en vn punto sobre vna recta linea, son tanto como dos rectos.*

(a) 13. lib. 1.

2. (b) *Al contrario si los angulos de vn punto son tanto como dos rectos, se formaràn sobre vna recta linea.*

(b) 14. lib. 1.

3. *Consectario, si son mas, ò menos de dos rectas, no se formaràn sobre vna recta linea.*

4. *Los angulos, que se pueden formar en vn punto, son tanto como quatro rectos. Este es Corolario, que se infiere de lo dicho.*

5. *Si* (c) *dos lineas se cortan, los angulos verticales opuestos son iguales entre si.*

(c) 15 lib. 1

DE-

DEMOSTRACION (*fig. 1. lib. 1.*) *caſo 2.*

1. *Sobre la linea* AB. *en el punto* E. *formenſe qualeſquiera angulos* AEC.CEB.ò AEC.CEF.FEB.*digo que ſon tanto como dos rectos*.Porq̃ ſi del punto E. ſe imagina deſcrito el circulo ACBD.ſiendo los arcos AC. CB. iguales, ſeran los angulos AEC. CEB. rectos iguales, (Def.11.)y ſi la linea EF. corta los arcos BF. FA. deſiguales,los dos juntos ſeràn tanto como el ſemicirculo ACB.Luego los dos angulos BEF. FEA. ſon tanto como dos rectos. (Def. 10.) y ſiendo los tres arcos BF. FC. CA. vn ſemicirculo, ſon ſus tres angulos tanto como dos rectos.

2. *Al contrario, ſi los dos, ó tres angulos referidos ſon tanto como dos rectos, ſerà* AEB. *vna recta*;porque ſeràn los arcos AC. CF. FB. vn ſemicirculo (Def. 11.) Luego AEB. ſerâ el diametro, y aſsi vna recta linea. (Def. 8.)

3. *Si dos angulos* AEC. CEF. *fueren menos que dos rectos*: *no ſerán* AE. EF. *vna recta*; *y ſi los dos* GEC. CEB. *ó los tres* GEC. CEF. FEB. *fueren mas, que dos rectos, no ſerán* GE. EB.*vna recta*; porque los angulos que ſe forman ſobre la vna linea, ni ſon mas, ni menos que dos rectos: (*num.* 1.) Luego los que ſon mas, ò menos que dos rectos, no ſe forman ſobre vna linea.

4. *Todos los angulos que ſe pueden formar en vn punto E.ſon tanto como quatro rectos*, porque todos los angulos del punto E. comprehenden enteramente al circulo en los arcos AC. CF. FB. BD. DG. GA.Cuyo centro es el punto E.Luego comprehenden las quatro quartas del circulo,que ſon quatro angulos rectos(Def.7.y 11.)

5. Si dos rectas CD. GF. ſe cortan en E. los angulos verticales, que ſon los opueſtos CEF. GED. ò CEG. FED. ſon iguales entre sì, porque ſi del centro E. ſe deſcrive vn circulo, ſeràn iguales los ſemicirculos DAC. GAF. (def. 8.) y quitando el arco comun GAC,quedarân iguales arcos CF.GD. (15.P.) luego los angulos opueſtos CEF. GED. tienen iguales medidas, y por conſiguiente ſon iguales, (def, 10.) lo miſmo de los obtuſos verticales GEC. DEF, ſe demueſtra.

Demoſtracion del numero primero, con eſtilo analityco.

Prevencion. ſi la linea FE. no es perpendicular a la AB. levanteſe la perpendicular CE.

Es

Es el angulo CEB. ∽ CEF. + FEB. (9. p.) luego los angulos AEC. + CEB. ∽ AEC. + CEF. + FEB. (15. p.) pero los angulos AEC + CEB. ∽ 2. rectos (def. 10. l. 1.) luego AEC. + CEF. + FEB. ∽ 2. rectos (13. p.) pero AEC. + CEB. ∽ AEF. (9. p.) luego AEF. + FEB. ∽ 2. rectos (def. 10. l. 1.) luego si la linea FE. fuere perpendicular à la AB. seràn los angulos AEF. y FEB. rectos (def 12. l. 1.) y sino lo fueren, seràn tanto como dos rectos (def. 10. l. 1.)

(a) prop. 27. lib. 1. (b) prop. 27. lib. 1. (c) prop. 29. (d) prop. 28. lib. 1.

PROPOSICION 2. DE LAS PARALELAS.

1. Si (a) dos rectas son paralelas, y otra las corta, haze los angulos externos opuestos iguales.

2. Tambien (b) haze los angulos alternos iguales.

3. Los (c) internos de vna parte, son tanto como dos rectos.

4. Si (d) vna recta haze cō otra todos los dichos angulos, sō paralelas.

5. Si las dos lineas no son paralelas, no hazen dichos angulos, y si no hazen dichos angulos, no son paralelas.

DEMOSTRACION. (fig. 4. lib. 1.)

1 *Sean* AB. CD *paralelas, y cortelas qualquiera recta* EF. *digo, que entra en la primera, y sale de la segunda con iguales angulos, esto es, que los angulos externos opuestos* EHC. FGB. *son iguales:* porq la recta EF. entra en las paralelas cō iguales angulos (cor. 1. def. 25.) son los angulos 1. y 4. iguales: y pues el 4. y 6. son tābien iguales por verticales (1. l. 1. n. 5.) luego tambien el 1. y 6. (11. p.) luego entra, y sale con iguales angulos, y los externos opuestos son iguales.

2. *La recta* EF. *corte á las paralelas* AB. CD. *digo que los angulos alternos 2. y 4, que son los dos internos opuestos á partes contrarias, son iguales.* Porque el angulo 1. y 2. son iguales por ser verticales. (1. l. 1. n. 5.) tambien el 1. y 4. son iguales, porque EF. entra en las paralelas con iguales angulos (def. 25. coro. 1.) luego el 2. y 4. son iguales (11. p.) que son los alternos, ò internos opuestos.

3. *Si* EF. *corta las paralelas* AB. CD. *los angulos internos á vna misma parte 2. y 5. son iguales á dos rectos, y tambien 3. y 4.* Porque el 4. y 5. son tanto como dos rectos, por estar en vn punto sobre vna recta AB. (1. lib. 1. num. 1.) siendo el 4. igual al 2. por ser alternos (num. 2.) serà el 2. y 5. tanto como dos rectos, que son los

los internos á vna parte. Los numeros 4. y 5. no necessitan de demostracion, por ser consectarios bastantemente claros.

Otra demostracion de los num. 1. 2. y 3. con estilo Analytico.

Prevencion. *Si no es el angulo 4. ⌒ 2. será el angulo 4. + q. 2. ó 4. — q. 2.*

1. Es (por la prevencion) el angulo 4. + q. 2: Luego 4. + 5. ⌒ q. 2. + 5. (17. P.) pero (1. lib. 1. num. 1.) 4. + 5. ⌒ 2. R: Luego 2. R. + q. 2. + 5. y asi 2. + 5. — q. 2. R: Luego (nu. 5.) Las rectas AB. y CD. no son paralelas, y concurrirán azia los puntos B. y D. contra lo supuesto. Y asi no es el angulo 4. + q. 2. y por la misma razon, no es 4. — q. 2. Luego 4. ⌒ 2. q. es el (num. 2.) = Es el angulo 1. ⌒ 2. (1. lib. 1. num. 5.) pero 2. ⌒ 4. (num. 2.) Luego 1. ⌒ 4. (11. P.) Luego 1. ⌒ 6. su igual que es el (num. 1. que se avia de demostrar.

2. El angulo 1. ⌒ 4. (num. 1.) Luego 1. + 3. ⌒ 4. + 3. (15. P.) pero 1. + 3. ⌒ 2. R. (1. lib. 1. num. 1.) Luego sus iguales 4. + 3. ⌒ 2. R. que es el 3. numero, que se avia de probar.

PROPOSICION 3. lib. 1.

DE LOS ANGULOS DE LAS FIGURAS.

1. *Los* (a) *angulos de vn triangulo son iguales á dos rectos.* (a) prop 32. lib. 1.
2. *Si vn lado se continua, el angulo externo es igual á los dos internos opuestos* (b) Luego mayor que vno. (b) prop 32. y 16. lib. 1.
3. *Los angulos de qualquier rectilineo son doblados rectos, menos quatro que los lados.*
4. *Los externos todos de vn rectilineo son iguales á quatro rectos.*

CONSECTARIOS.

5. *Si vn angulo de vn triangulo es recto, los otros dos hazen otro recto, y cada vno es agudo menor, que recto.*
6. *Los angulos de vn rectilineo son iguales á los de otro de tãtos lados.*
7. *Si vn angulo es igual á otro, las sumas de los otros son tambien iguales; y al contrario.*

Demostracion. (*fig. 5. lib. 1.*)

Digo que en el triangulo. ABC. *los tres angulos d. b. e. son tanto como dos rectos, y lo mismo es en todos los triangulos.* En el triangulo ABC. considerese FBD. paralela á la base AC. Luego los angugulos alternos a. y d. son iguales; y tambien c. y e. (2. *lib.* 1. num. 2.) Luego si se añade à cada parte el angulo b. los tres angulos a. b. c. son iguales à los tres d. b. e. (15. P.) y pues los tres a.b.c. hazen tanto como dos rectos por formarse en vn punto (1. l. n. 1.) los tres del triangulo d. b. e. seràn iguales à dos rectos.

2. *En el triangulo* ABC. *continuado el lado* AC. *hasta á* G. *el angulo externo* BCG *es igual á los dos internos opuestos* b. y d. Porque el angulo BCG. con el angulo e. haze dos rectos, (1. l. 1. n. 1.) los angulos d. b. con e. tambien hazen dos rectos (n. 1.) luego el angulo externo BCG. es igual, los dos internos opuestos d.b.&c. luego mayor de qualquiera de los dos.

3. *Sea vn rectilinio* ACDEF. *de cinco lados, el numero duplo es* 10: *quitando* 4. *quedan* 6. *digo que todos sus angulos valen tanto como* 6. *angulos rectos, y assi en todos los otros, quitando siempre* 4. *del numero duplo de los lados.* Porque si se toma dentro, qualquier punto B. y se tiran BA. BC. BD. BE. BF. se formaràn tantos triangulos como lados; y pues cada triangulo tiene tanto como dos angulos rectos, (n. 1.) todos los angulos seràn doblados rectos, que los lados; y quitando los angulos, que se forman en el punto B. iguales à quatro rectos (1. l. 1. n. 4.) quedaràn los angulos de la figura doblados rectos menos 4. que los lados, &c.

4. *En qualquier rectilineo* ACDEF. *continuados á fuera todos sus lados, todos los angulos externos son tanto como* 4. *rectos.* Porque el externo D G. con su immediato interno DCA. es tanto como dos rectos (1. lib. 1. num. 1.) y cada externo con su externo es tambien dos rectos: Luego todos los externos con todos los internos son doblados rectos, que los lados de la figura: Luego porque los internos son doblados rectos, menos 4. que los lados, suplen los externos estos 4. rectos, y assi son iguales à 4. rectos.

Los Consectarios no necessitan de explicacion, por ser muy claros.

Demostracion de los numeros* 1. *y* 2. *Con estilo analytico.

Prevencion. Tirese (prob. 1. prat. 4.) por el punto L. la LB. paralela à CD.

***Demostracion del num.* 2.** Es (prop. 2. lib. 1. num. 2.) el angulo BCD. [illegible] LBC.

Item

Item, el angulo (corol. 1. def. 25. l. 1.) GCD. = L. pero (9. p.) BCG. = BCD. + DCG: Luego BCG. = CBL. + ſus iguales (11. p.) que es lo que ſe avia de probar.

Demoſtracion del n. 1 por lo demoſtrado: Los angulos L. + LBC. + LCB. = BCG. + LCB. pero (1. l. 1. n. 1. BCG. + LCB. = 2 R: luego ſus iguales L + LBC. = 2 R. (13. p.)

PROPOSICION 4. lib. 1.

De la total igualdad de los triangulos.

1. Si (a) los tres lados de vn triangulo fueren iguales á los tres lados de otro triangulo, vno á vno, todo lo demas ſerá igual. (a) pro. 8 p. lib. 1.

2. Si (b) dos lados iguales á dos del otro comprehenden iguales angulos, todo lo demás ſerá igual. (b) prop. 4. l. 1.

3. Si (c) dos angulos de vn triangulo ſon iguales á dos de otro, y comprehenden iguales lados, todo es igual. (c) prop. 26. l. 1.

4. Si el vn angulo opueſto á vn lado fuere igual al otro de otro triangulo, y el otro angulo opueſto al otro lado fuere de vna eſpecie, en vno, y otro triangulo, y los lados que comprehenden el otro angulo en ambos triangulos fueren iguales, todo lo demás ſerá igual.

Demoſtracion (fig. 6. lib. 1.)

1. *En los triangulos* ABC. ADC. *ſean iguales los lados* AB. AD. tambien BC. DC. *y* AC. *comun, digo, que todo lo demás es igual. Eſto es los angulos cada vno de por si ſon iguales à los del otro.* Porque ſi ſe doblare el triangulo ABC. ſobre ADC. ſiendo las rectas CB. y AB. radios de los circulos BFD. BGD. no ſe podràn juntar ſino es en el punto D. donde ſe cortan los circulos: (prop. 5. lib. 3. num. 2. 3.) luego todo el triangulo ABC. ſe ajuſtarà con el triangulo, ACD. y ſerân iguales los angulos B. y D. Tambien los angulos CAB. y CAD. y los angulos ACB. y ACD. (14. P.)

2. *En los triangulos* ABC. ADC. *ſean iguales los lados* AB. AD. *tambien* AC. AC. *que es comun, y el angulo comprehendido* BAC. DAC. *Digo, que todo lo demás es igual.* Porque ſi ſe doblare el triangulo ABC. ſobre ADC. ſe ajuſtarâ el angulo CAB. con CAD. y la recta AB. con la recta AD. por ſer iguales (14. P.) Luego como el punto B. cayga ſobre D. caerâ la recta CB. ſobre CD. Luego ſe

ajustarán los triangulos ABC. ADC. y los angulos D. y B. serán iguales; y tambien BCA. DCA. y los lados CB. CD. &c.

3. *En los triangulos* BAC. DAC. *sean iguales los angulos* BAC. DAC. *y* BCA. DCA. *y los lados* AC. AC. *comprehendidos de los angulos: digo, que todo lo demas es igual.* Porque descritos desde A. y C. los arcos BFD. BGD. serân iguales BG. GD. por ser medida de iguales angulos, y por la misma razon, serân tambien iguales los arcos FB. DF. (Def. 10.) luego si el triangulo ABC. se doblare sobre ADC. se ajustarán los arcos BF. FD. y tambien DG. BG. (14. P.) luego el punto B. cae sobre D. y se ajusta el triangulo, ABC. sobre ADC. y serân iguales los lados AB. AD. y CB. CD. y los angulos B. y D. &c. Si los lados AC. AC. fueren iguales, y los angulos BAC. DAC. y tambien B. y D. todo lo demas será igual. Porque el tercer angulo BCA. serâ igual â DCA. (3. *l.* 1. *n.* 7.) Luego se demostrará la proposicion como antes.

4. *En los triangulos* ABC. ADC. *sean iguales los lados* AB. AD. *y* AC. AC. *y el angulo* BCA. *opuesto al lado* AB. *igual al angulo* DCA. *el qual se opone al igual lado* AD. *y el angulo* B. *opuesto al lado* AC. *sea de la misma especie, que el angulo* D. *que se opone al igual lado* AC. *digo que todo lo demás es igual*: Porque si desde A. se descrive el circulo BDE. y desde C. el arco BFD. continuando el lado CD. hasta E. y se doblare el triangulo ABC. sobre ADC. se ajustará el angulo ACB. con ACD. su igual (14. p.) luego el punto B. caerá en D. ò en E. porque AD. AE. son iguales â AB y si DE. se diviere en dos partes iguales en H. en los triangulos AHD. AHE. serân iguales los lados AD. AE. y DH. EH. y AH. comun: Luego los angulos AHE. AHD. son iguales, y rectos, (5. *l.* 1. *n.* 6. 7.) y AEH. ADH. son iguales, y agudos (*n.* 1. prop. 3. *l.* 1. *n.* 5.) luego el angulo ADC. será obtuso (1. *l.* 1. *n.* 1.) luego siendo ABC. tambien obtuso, por ser de la misma especie, caerâ el punto B. sobre D. y no sobre E. Luego ajustandose los triangulos ABC ADC. serân en todo iguales. La misma demostracion es en todos los casos, aunque el lado AC. no sea comun, porque dos lados iguales se pueden ajustar, y formar vn lado comun.

DE-

DEMOSTRACION DEL NUMERO 2. CON ESTILO *analytico.*

Prevencion. Imaginese puesto el punto A. del triangulo BAC. sobre el punto A. del triangulo DAC.

Es (por suposicion,) el angulo BAC. ⌒ DAC: luego (14. p.) se ajustan; y la linea AB. caerà sobre la AD; y la AC. sobre la AC. pero (por suposicion) AB. ⌒ DA. y AC. ⌒ AC. que es comun, luego (14. p.) se ajustan, y el punto B. cae sobre el punto D; y C. sobre C: luego la base BC. con la CD. Se ajusta; porque sino se ajustara, coincidiendo sus estremos puntos B. D. C. caeria dentro, ò fuera del triangulo, y assi contra lo supuesto, y dos lineas rectas comprenderian espacio contra la (def. 16. l. 1.)

SCHOLIO.

Tres cosas se han de distinguir, assi en los triangulos, como en los paralelogramos, es a saber: *igualdad total; igualdad absoluta; y semejança. La igualdad total* consiste, que cada lado del vno sea igual à cada lado del otro; y cada angulo à cada angulo, y todo el espacio à todo el espacio. (segun lo demostrado en esta proposicion) La *absoluta*, consiste en la igualdad de sus espacios; porque esta basta para que absolutamente se llamen iguales. (8. l. 1. caso 2. n. 3.) La *semejança* consiste, que los angulos correspondientes sean iguales; y que los lados que comprehenden iguales angulos sean proporcionales con proporcion de igualdad. (def. 4. l. 6.) La igualdad *total* infiere su igualdad *absoluta*, y su semejança; pero su *semejança* no infiere *su total*, ni su absoluta; como ni su igualdad *absoluta* infiere su semejança; aunque su semejança infiere su *total*, si vn lado del vno fuere igual a vn lado homologo del otro. (n. 2. 3.)

PROPOSICION 5. LIB. I.

De las partes de vn triangulo.

1. (a) *En el triangulo isosceles los lados iguales se oponen à iguales angulos.* (a) 5. l. 1.
2. (b) *Y los angulos iguales à lados iguales.* (b) 6. l. 1.
3. (c) *En qualquier triangulo, el mayor lado se opone à mayor angulo, y el angulo mayor à mayor lado.* (c) 18. y 19. l. 1.

(d) 20.l.1. 4. ([d]) *La suma de qualesquiera dos lados es mayor que el tercero.*

CONSECTARIOS.

(e) 7.lib.1. 5. ([e]) *El triangulo equilatero es equiangulo, y al contrario.*

6. *En el triangulo isosceles, la recta que parte igualmente la base, parte tambien el angulo; y si parte igualmente el angulo, tambien la base, y siempre es perpendicular, y al contrario.*

7. *Si la perpendicular parte igualmente la base, parte tambien el angulo, y al contrario, y el triangulo siempre será isosceles.*

8. *Si dos rectas iguales caen de un punto sobre otra recta, entrambas se apartan igualmente de la perpendicular, y hazen con ella iguales angulos, y al contrario.*

Y la perpendicular es la mas breve linea, que de un punto puede caer sobre otra.

DEMOSTRACION (fig. 7. lib. 1.)

1. Sean *en el triangulo* ABC. *iguales los lados* AB. AC: *digo, que serán tambien iguales los angulos opuestos* c.b: La recta Ae. parte por medio el angulo A: Luego porque los lados BA. Ae. son iguales à CA. Ae. y comprehenden iguales angulos BAe. CAe. serà todo lo demas igual, (4. l. 1. n. 2.) esto es el angulo b. igual â c. y el segmento be. à oc. y el angulo e. à o: luego son rectos, y Ao. perpendicular. (def. 12.) De aqui nacen los consectarios 5.6.7.8.

2. *En el triangulo ABC. sean iguales los angulos* b.c: *digo, que tambien los lados opuestos AB. AC. son iguales.*

Porque dividiendo Ae. igualmente al angulo A. y siendo iguales los angulos BAe. CAo. y el lado Ae. comun. Todo el triangulo AeB. es igual à AoC. (4. l. 1. n.2.) Luego AB. AC. son lados iguales opuestos a iguales angulos b. y c.

3. *En el triangulo ADC. sea el lado AD. mayor que AC. digo que será el angulo C. opuesto á AD. mayor que D. opuesto á AC.*

Porque tomando à AB. igual â AC. y tirando la recta BC. seràn iguales los angulos b. y c. (n. 1.) y porque el angulo b. es externo al triangulo CDB. serà b. mayor que D. (3.l.1. n. 2.) Luego c. que es igual a b. es tambien mayor que D. y ACD. aun es mayor que c. por comprehenderle: (9.p.) luego serà mayor que D. (18.p.)

Al contrario, si en el triangulo ADC. el angulo ACD. fuere mayor

yor del angulo D. será el lado AD. opuesto á C. mayor que el lado AC. opuesto á D.

Porque si los lados AD. AC. fueran iguales, serian tambien iguales los angulos C. D. (n. 1.) Si AC. fuera mayor que AD. seria tambien el angulo D. mayor que C. Todo lo qual es contra la hypothesi: Luego AD. mayor es que AC.

4. *En qualquier triangulo ACD. la suma de qualesquiera dos lados AC. CD es mayor que el tercero AD.*

Porque siendo AD. linea recta, es la mas breve distancia entre los puntos A. y D. (Def. 4.) Luego AD. es menor que AC. y CD.

5. *Si del punto A. cayere Ae. perpendicular sobre BC. será Ae. la mas breve linea, q̃ desde el pũto A. se puede tirar á la recta BC.*

Porque tirando qualquiera otra AB. y siendo en el triangulo AeB. el angulo e. recto, será el angulo b. agudo, menor que recto. (3. l. 1. n. 5.) Luego AB. que se opone a mayor angulo e. será mayor que Ae. (n. 3.) y será vnica, porque ningun otro angulo b. puede ser recto (3. l. 1. n. 5.

DEMOSTRACION DEL NVM. 3. CON ESTILO ANAlytico.

Prevencion. Del lado mayor AD. del triangulo ADC. cortese la AB. ⊓ AC; y tirese la BC.

Demostracion. En el triangulo ABC. es por la prevencion, el lado AC. ⊓ AB: Luego (n. 1.) el angulo c ⊓ b; pero (prop. 5. n. 4.) el angulo b + q. CDA: luego (13. p.) el angulo su igual c + q. CDA; pero (9. p.) el angulo ACD. + q. c: luego (18. p.) el angulo ACD. mucho mayor que el angulo CDA. que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 6. LIB. 1.

De la desigualdad de los triangulos.

1. (a) *Si dos triangulos tuvieren dos lados iguales; el que tuviere mayor angulo comprehendido, tendrá mayor base.* (a) 24. l. 1.
2. (b) *Y el que tuviere mayor base, tendrá mayor angulo.* (b) 25. l. 1.
3. (c) *Si dos triangulos tuvieren la misma, ó igual base, el que tuviere sobre ella vn angulo menor, y el otro, ó igual, ó menor, tendrá menores lados.* (c) 21. l. 1.

I.

4. (c) Los menores lados comprehenden mayor angulo

5. (e) Si de qualquier punto dentro de vn triangulo, se tiraren lineas á los terminos de la base, sucederá lo mismo, que en todo lo dicho en los n. 3. y 4.

DEMOSTRACION (*fig. 8. lib. 1.*)

1. En los triangulos BAD. BAC. es AB. lado comun, ó igual; y AC. AD. lados iguales, pero el angulo BAC. es mayor que BAD; digo, que la base BC. es mayor que BD.

Porque en el triangulo AEC. los dos lados AE. EC. son mayores, que AC. (5. l. 1. n. 4.) y AC. igual à AD: luego los lados AEC. son mayores que AED. que es AC. (13. p.) luego si de desiguales AEC. AED. se quita el espacio comun AE. quedarà EC mayor que ED. y si a desiguales CE. DE. se añade el espacio comun EB. seran CEB. mayores, que DEB. (17. p.) pues los dos lados DEB. son mayores que DB. (5. l. 1. n. 4.) luego CEB. esto es la base CB. mayor es que DB. (18. p.)

2. En los triangulos BAC. BAD. sea BA. lado comun, y DA. CA. lados iguales, y la base CB. mayor, que DB: digo, que el angulo opuesto CAB. es mayor que DAB.

Porque si los angulos fueran iguales, siendo comprehendidos de los lados AC. BA. que son iguales a BA. AD. serian tambien iguales las bases BC. BD. (4. l. 1. n. 2.) loqual es contra la Hypothesi: luego los angulos BAC. BAD. son desiguales: y porque el mayor angulo tiene mayor base (n. 1.) suponiendose la base BC. mayor que DB. serà el angulo que se opone à ella BAC. mayor que BAD.

3. Los triangulos BAC. BAE. tienen la base AB. comun, ó igual; y tambien el angulo ABE. y el angulo BAE. menor que BAC: digo, que la suma de los lados AE. EB. es menor, que AC. CB.

Porque en el triangulo ACE. los dos lados AC. CE. son mayores que AE. (5. l. 1. n. 4.) y añadiendo el espacio comun EB. seran AC. CE. EB. mayores que AE. EB. (17. p.) *y si el angulo ABF. fuere menor, que ABC. seran en el triangulo AFB. los lados AF. FB. menores, que AC. CB.*

Porque continuando AF. hasta à E. en el triangulo FEB. los dos

la-

lados FE. EB son mayores que el tercero FB. (5. lib. 1. num. 4.) luego añadiendo el comun FA. seràn BE. EF. FA. mayores que BF. FA. (17. P.) y porque BC. CA. se han demostrado mejores , que BE. EA. luego BCA. seràn mucho mayores, que BF. FA. (18. P.)

4 *En entrambos casos los lados menores comprehenden mayor angulo.* Porque en el triangulo ACB. los tres angulos son iguales a dos rectos ; y tambien en el triangulo ABE. (5. l. 1. n. 1.) luego siendo la suma de los angulos ABE. EAB. menor que la de ABC. CAB. por comprehender CAB. à EAB. (9. p.) la recta AEB. mayor serà que ACB. (16. p.) lo mismo se demuestra del angulo AFB.

5. *Si dentro del triangulo ACB. se tomare qualquier punto E. ó. F. y se tiraren EB. EA. ó FB. FA. serà lo mismo.* Porque seràn los mismos casos explicados en los numeros antecedentes, como se ve en la figura.

DEMOSTRACION DEL N. 5. y 4. CON ESTILO ANAlytico.

Prevencion alarguese la linea AF. hasta que corte al lado CB. en algun punto E.

Demostracion del n. 5. son (prop. 5. n. 4.) BE. + EF. + q. BF. Item las lineas AC. + CE. + q. AE. luego (17. P.) BE. + EF. + AC. + CE. + q. BF. + AE. pero (9. P.) CE. + BE. ∽ BC. Luego BC. + AC. + FE. + q. BF. + AE. pero (9. P.) AE. ∽ EF. + FA. luego BC. + CA. + EF. + q. BF. + EF. + FA. luego (17. p.) BC. + CA. + q. FB. + FA.

Pruebase el n. 4. Es (prop. 3. lib. 1. num. 2.) el angulo AFB. + q. FEB. item (por la misma) es el angulo FEB. + q. ACB. luego (18. P.) el angulo AFB. mucho mejor que ACB.

PROPOSICION 7. lib. 1.

Del Paralelogramo en si mismo.

1. (a) *Sus angulos , y lados opuestos son iguales.* (a)

2. (a) *Los diametros , o diagonales le parten , y se parten igualmente.* 34. l. 1.

3. *Lo mismo es en qualquier recta que passa por el centro, ó concurso de los diametros.*

4. Vn quadrilatèro ferá paralelogramo, si tiene dos lados paralelos iguales.

5. Tambien si sus lados opuestos son iguales.

6. Tambien si los angulos opuestos son iguales.

DEMOSTRACION. (fig. 9. lib. I.)

I. Sea qualquier paralelogramo ABCD: digo, que sus lados opuestos DA. CB. son iguales; y tambien los angulos opuestos D. B. y A. C. suponiendo que DA. CB. son paralelos.

Porque tirando el diametro AC. por ser AB. DC. paralelas, los angulos alternos f. a. son iguales (2. l. 1. n. 2.) y tambien e. o. porque AD. BC. son paralelas. Luego siendo AC. lado comun à los dos triangulos ABC. ADC. y los angulos sobre la base a. e. iguales à f. o. todo es igual (4. l. 1. n. 3.) AB. es igual à DC. y CB. à DA. y el angulo ABC. à CDA. y el angulo A. que es a. o. â C. que es f. e: luego los lados, y angulos opuestos son iguales.

2. *En el mismo paralelogramo, digo, que el diametro AC. parte al paralelogramo en dos partes iguales.* Porque el triangulo ADC. se ha demostrado igual al triangulo CBA. (n. 1.) luego el diametro AC. parte al paralelogramo en dos partes iguales. De la misma suerte, que el num. 1. se demostrarà el triangulo DCB. igual al triangulo DAB. con que tambien el diametro DB. parte igualmente al paralelogramo.

Tambien los diametros AC. DB. se parten igualmente. Porque en los triangulos DGC. y AGB. los lados DC. AB. son iguales, por ser lados opuestos del paralelogramo, (n. 1.) y tambien los angulos opuestos f. y a; y tambien g. y b. (n. 1.) Luego porque en los triangulos DGC. AGB. angulos iguales, comprehenden iguales lados, todo lo demas es igual (4. l. 1. n. 3.) esto es DG. y GB. tambien CG. y GA: luego los diametros se parten igualmente.

3. *Qualquiera otra recta EF. si passa por el centro, ó intérseccion de los diametros G. Digo, que se parte igualmente, y que tambien parte igualmente al paralelogramo AC.* Porque GC. GA. son iguales (n. 2) y los angulos alternos e. o. y h. d. (2. l. 1. n. 2.) todo el triangulo AEG. es igual à GFC. y EG. à GF. (4. l. 1. n. 3.) Luego

go EF. ſe parte igualmente, y porque ABC. es la mitad del paralelogramo (n. 2.) ſi le quitamos GFC. y en ſu lugar ſuſtituymos EGA. ſu igual, ſerà el trapecio EABF. igual al triangulo ABC. ò medio paralelogramo.

4. *Si en el quatrilatero ABCD. los lados opueſtos DC. AB. ſon paralelos, é iguales: digo, que es paralelogramo.* Porque ſi DC. AB. ſon paralelos iguales, ſeràn los angulos alternos f. a. iguales, (2. l. 1. n. 2.) y AC. lado comun: luego porque DC. CA. iguales à BA. AC. comprehenden iguales angulos f. a. todo es igual (4. l. 1. n. 2.) DA. CB. y los angulos alternos e. o. iguales: luego CB. DA. ſon paralelas iguales, y AC. es paralelogramo.

5 *Si en el quadrilatero ABCD. los lados opueſtos AB. DC. ſon iguales, y tambien AD. BC. digo, que es paralelogramo.* Porque tirado el diametro AC. ſi DC. AB. ſon iguales; y tambien DA. BC. Siendo AC. comun todo el triangulo ADC. es igual à CBA. (4. l. 1. n. 1.) luego los angulos alternos e. o. ſon iguales: luego CB. AD. ſon paralelas (2. l. 1. n. 4.) y porque f. a. ſon iguales, ſeràn DC. AB. paralelas (2. l. 1. n. 4.) luego DC. es paralelogramo.

6 *Si en el quadrilatero ABCD. ſon iguales los angulos opueſtos, A. y C. y tambien B. y D. digo, que es paralelogramo.* Porque ſi los angulos C. A. ſon iguales; y tambien D. B. ſeràn C. B. tanto como D. A: luego porque los quatro C. B. A. D. ſon tanto como quatro rectos (3. l. 1. n. 3.) ſeràn C. B. tanto como dos rectos; luego por ſer internos iguales à dos rectos, ſeràn DC. AB. paralelas (2. l. 1. n. 4.) y aſsi miſmo, porque D. C. ſon iguales à A. B. y tanto como dos rectos, ſeràn DA. CB. paralelas, y AC. paralelogramo.

DEMOSTRACION DE LOS NUM. 1. y 2. CON ESTILO analytico.

Demoſtracion del num. 1. en los triangulos BAD. y BCD. que tienen el lado comun DB. es (2. l. 1. n. 2.) el angulo CBD. $\frown$ BDA. y el angulo CDB. $\frown$ DBA: luego (prop. 4. l. 1. n. 3.) el lado DC. $\frown$ BA. y el lado BC. $\frown$ DA. y el angulo C. $\frown$ A. y (15. P.) el angulo total ADC. $\frown$ ABC. que es lo que ſe avia de demoſtrar.

El num. 2. se demuestra. Porque por lo ya probado, el triangulo BAD. $\backsim$ BCD. y el ABC. $\backsim$ CDA. Luego los diametros se parten, y parten igualmente al paralelogramo.

PROPOSICION 8. LIB. 1.

De los triangulos, y paralelogramos entre sí.

(a) 39. y 40. l. 1 — 1 (a) *Si tienen igual altura, estan, ò pueden estar entre dos paralelas.*

(b) 41. l. 1 — 2 (b) *Un triangulo es medio paralelogramo.*

(c) 35. y 36. l. 1, 37. y 38. l. 1 — 3 (c) *Los paralelogramos, que tienen una misma, ó igual vase, con igual altura, son iguales.*

4 (d) *Los iguales, si tienen igual vase, tienen igual altura, y al contrario.*

5 *Si los paralelogramos tienen igual vase, el que tiene mayor altura es mayor, y duplo, el que dupla, y al contrario.*

6 *Lo mismo es de los triangulos entre si. Pero si un triangulo tiene la base igual á la de un paralelogramo, y la altura dupla, ó al contrario, será igual al paralelogramo.*

DEMOSTRACION (*fig. 10. l. 1. casos 1. 2. 3.*

1 *Si los paralelogramos AF. BC. tienen iguales alturas CO. FH: digo, que ellos, ò estan, ó pueden estar entre dos paralelas.* Porque como las alturas de las figuras se miden por los perpendiculos CO. FH. (def. 25 consectario 2) Si los perpendiculos son iguales, seran OH. CF. paralelas, por ser equidistantes: (def. 25. l. 1.) luego las figuras, que tienen igual altura, si tienen las bases en la recta OH. feneceràn en la recta CF. y si no tienen las vases en OH. como se puedan poner sobre ella, podràn estar entre dos paralelas, y al contrario. Si las figuras estan entre dos paralelas, tienen igual altura, porque las paralelas OH. CF. siempre tienen igual perpendiculo CO. FH. (def. 25. cons. 2.)

2 *Sea qualquier triangulo Z. (caso 2. de la fig. 10.) digo que es medio paralelogramo.* Porque si AC. se considera paralela à BD. y DC. à BA. será BC. paralelogramo, y el triangulo Z. su mitad. (7. l. 1. n. 2.) Otra vez. Si BF. se considera paralela à DA. y DF. à BA. será AF. paralelogramo, y el triangulo Z. será su mitad (7. lib. 1. n. 2.)

3 *Sean los paralelogramos AF. BC. en los casos 1.2.3. de la citada figura 10. Sobre vna misma, ó igual vase AB. digo, que si tienen igual altura, ó estan entre dos paralelas, son iguales.* Porque si las bases son iguales, se puede ajustar la vna sobre la otra (14 p.) y haran vna misma vase; y siendo iguales las alturas, estaran los paralelogramos entre dos paralelas. (n. 1) Considerense pues en todos los tres casos, los dos paralelogramos AF. BC. sobre vna base AB. y entre dos paralelas AB. CF: Luego en el paralelogramo BC. los lados opuestos CA. BD. son iguales, y tambien en el paralelogramo AF. son iguales los lados AE. BF. (7. l. 1. n. 1.) y porque CA. BD. son paralelas, la recta HA. entra en ellas con iguales angulos HBD. HAC. (Def. 25. consec. 2.) y assimismo son iguales angulos HBF. HAE. por ser FB. EA. paralelas, y las corta HA: Luego si de los angulos iguales HBD. HAC, quitamos los iguales HBF. HAE. quedarã iguales angulos FBD. EAC. (15. p.) Luego porque los lados AC. AE. iguales à BD. BF. comprehenden iguales angulos EAC. FBD. todo el triangulo ACE. serà igual à BDF. (4. l. 1. n. 2:) Luego si en los casos 1. y 2. añadimos à cada triangulo EAC. FBD. el comũ BDEA. resultarà el paralelogramo AF. igual â BC; y si en el caso 3. de los triangulos iguales CAE. DBF. quitamos el comun DGE. y añadimos el comũ AGB. resultarán los paralelogramos AF. BC. iguales. (15 p)

4 *Si los paralelogramos iguales BC. AF. estan sobre vna misma, ó igual base AB: Digo tienen igual altura, y al contrario.* Porque continuando la paralela CD. cortarà el paralelogramo AF. igual à BC. (n. 3.) Luego CD. passarâ por EF. y seran DC. EF. vna recta, y assi los paralelogramos BC. AF. estan entre dos paralelos, y son de igual altura. Al contrario, si las alturas son iguales, se demostrarán las bases iguales, tomando las alturas como bases, y las bases como alturas.

5 *Si dos paralelogramos tienen igual base, el que tiene mayor altura es mayor; el que la tiene dupla, es duplo, &c. y al contrario.*

Porque si los paralelogramos AD. AL. en el caso 3. tienen vna misma base AB. Continuando la paralela GDF. y los lados AGE. BLF. serã iguales paralelogramos AD. AF. entre dos paralelas (n. 3.) y porque todo AF. es mayor que su parte AL. (9. p.) serà tambiẽ

AD mayor que AM. (sup.) Luego el que tiene mayor altura es mayor.

En el caso 2. MD. tiene doblada altura que MB; y porque MB. BC. tienen iguales alturas MA. AC. son iguales, por tener tambien iguales bases (n.3.) Luego MD. que es igual a los dos MB. BC. serà duplo de vno de ellos, ò de MB. por componerse de ellos. Y assi el que tiene la altura dupla, es duplo, y si tripla, triplo, &c.

Al contrario, si consideramos, que CA. CM. son bases; y CM. dupla de CA. demostraremos, que el paralelogramo CN. es duplo de CB; porque CB. y AN son iguales (n.3.) y CN. es igual à los dos CB. AN. porque se compone de ellos. (9. p:) Luego CN. es duplo de CB. y asi quando la altura es igual, el que tiene la base dupla, es duplo, el que tripla, triplo, &c. y la que la tiene mayor, es mayor, &c.

6 *Lo mismo de los triangulos entre si.* Todo lo que se ha demostrado de los paralelogramos en los *nu.* 1. 3. 4. *y* 5. se demuestra de los triangulos entre sì; porque vn triangulo es medio paralelogramo; (n.2) de donde se infiere, que si dos triangulos tienen igual base, y altura, son iguales, *y al contrario*; y si son iguales, y tienen igual base, tendran igual altura; y si tienen igual altura, tendran igual base. Si tienen igual base, el que tiene mayor altura es mayor, y el que dupla, es duplo, &c. y si tienen igual altura, el que tiene mayor base, es mayor, y el que dupla, es duplo, &c.

7 *Pero si vn triangulo tiene igual altura a la de vn paralelogramo, y tiene la base dupla; ó si tuviere igual base, y la altura dupla, será igual al paralelogramo.* Porque en el caso 2. si sobre la base CA. estàn el triangulo CAD. y el paralelogramo CB. es CAD. la mitad de CB. (n.2.) Tambien si la base CM. del triangulo CMD. es dupla de la base CA. Con la misma altura CD. es el triangulo CAD. la mitad de CMD. (n.6.) Luego el triangulo CMD. y el paralelogramo CB. son iguales. (12. p.) de la misma suerte si CD. se considera como base, y la altura CM. es dupla de CA. serâ el triangulo CDM. igual al paralelogramo CB. porque cada vno es duplo del triangulo CDM (n.2. y 6.)

Al contrario, si el triangulo CDM. fuere igual al paralelogramo mo CB; y tienen igual base CD. tendrà la altura CM. dupla de la altura CA; y si tuviere doblada altura, tendrà igual base; pero si CM. se considera como base, y fuere esta dupla de la base CA. del paralelogramo CB. tendrà igual altura CD; y si tuviere igual altura CD. la base CM. del triangulo, serà dupla de la base CA. del paralelogramo CB.

Las prop. 47. y 48. de este lib. tienen su lugar en el lib. 2. prop. 4. que tratan de las potencias de las lineas.

DEMOSTRACION DEL N. 3. CON ESTILO ANALITICO. (caso 3.)

Es (prop. 7. l. 1. n. 1) el lado CD. ⎍ BA; y el mismo lado BA. ⎍ EF: Luego (11. p.) CD ⎍ EF: Luego las lineas CD + DE ⎍ EF + DE. esto es, CE ⎍ FD; pero (prop. 7. l. 1. n. 1) AC ⎍ DB; y AE ⎍ BF; luego en los dos triangulos CAE. y BDF. el lado CA ⎍ BD; y el lado CE ⎍ DF; y la base AE ⎍ BF; luego (prop. 4. l. 1 n. 1) el triangulo CAE ⎍ BDF; luego (15 p.) CAE — DGE ⎍ BDF — DGE. Esto es, el trapesoydes ACGD. ⎍ BGEF: Luego (15. p.) ACGD + AGB ⎍ BGEF + AGB. esto es el paralelogramo BC ⎍ AE. que es lo que se avia de probar.

Fin del Libro primero.

DEFINICIONES DEL LIB. SEGUNDO.

De las potencias de las lineas (fig. 3. l. 1. casos 23.)

1. *Potencia de una linea se dize el espacio mayor, que ella puede comprehender, tomada quatro vezes con angulos rectos, y formando un quadrado.* Como el quadrado GC. (caso 2.) es la potencia de la recta DC. y aunque el quadrado GC. consta de quatro lineas, se dize formado de sola una; por ser todas quatro iguales.

2. *Potencias de dos lineas son sus dos quadrados; potencias de tres lineas, son sus tres quadrados &c.*

Coro. 1. Si dos lineas son iguales, son sus potencias, ò quadrados iguales, porque se ajustan; y si las dos potencias son iguales, son las dos lineas iguales.

Co-

Corolario 2. Si el quadrado de vna linea DF. es tanto como los quadrados de otras dos DB. BF. se dize, que DF. puede tanto como DB. y BF. (caso 2.)

3. *La potencia de dos lineas es el espacio mayor, que entre las dos lineas pueden comprehender, formando vn paralelogramo rectangulo.* Como el rectangulo GB. (caso 2.) es la potencia de las dos rectas GF. FB. pues aunque tiene quatro lados, se dize formado de dos, porque los opuestos GF. DB. son iguales, y tambien GD. y FB.

4 *Gnomon*, es el concurso de dos planos, que forman angulo. Como es RAG. fig. 1. l. 2.

NOTA.

Quando los quadrados, y rectangulos no estàn formados, se nombran por las mismas lineas de que se pueden formar. Como el quadrado DC. es el que se puede formar de DC. El rectangulo BF. FG. es el que puede formar la recta BF. con la recta FG. (caso 2.)

Quando las dos rectas tienen vn punto comun; se nombran para mas compendio con solas tres letras. Como el rectangulo GEF. (caso 2.) es el que se puede formar de las rectas GE. EF. El rectangulo HFE. es el de GF. FE.

Todo lo dicho se puede aplicar à los paralelogramos, que no son rectangulos, substituyendo en lugar del quadrado al Rhombo; y en lugar del Oblõgo, ò rectangulo prolongado, al Rhomboyde. (cas. 3.)

Estos modos de hablar importan mucho para la inteligencia de los Autores.

LIBRO SEGVNDO DE EVCLIDES.

DE LAS POTENCIAS DE LAS LINEAS.

ESte libro es de grande vtilidad para demostrar los fundamentos del Algebra; y todo lo que en èl se demostrare del quadrado, y Rectangulo, conviene tambien al Rhombo, y Rhomboyde, y à los triangulos, que son sus mitades (8. l. 1. n. 2.) *Se advierte esto en comun, por-*

que

que no sea necessario repitirlo despues en cada proposicion.

El Libro 2. del Euclides vulgar, contiene 14. proposiciones, de las quales son dos problemas, que se dejan para el tratado de la Geometria practica, y 12. theoremas, que se reducen aqui à las 4. siguientes.

PROPOSICIONES.

Prop. 1. de la division de vna linea recta en qualesquiera dos partes.

Prop. 2. de la division de vna linea recta en dos partes desiguales.

Prop. 3. divisiõ de vna recta en dos partes iguales, y en dos desiguales.

Prop. 4. de la potencia de los lados de los triangulos rectangulo, obtusangulo, y acutangulo.

PROPOSICION I.

De la division de vna recta en qualesquiera dos partes.

1. (a) *El quadrado de toda, es igual à dos rectangulos de toda, y de los mismos segmentos.* (a) 2. l. 2. (q) 4. l. 2.

2. (b) *Tambien à dos quadrados de las partes, y à dos rectangulos de las mismas.*

3. *Tambien al rectangulo de toda, y vn segmento, y al quadrado del otro segmento, mas al rectangulo de los dos segmentos.*

4. (c) *El quadrado de toda, con el quadrado de vn segmento, es igual à dos rectangulos de toda, y del mismo segmento, con el quadrado del otro segmento.* (c) 7. l. 2.

5. *El rectangulo de toda, y vn segmento, es igual al quadrado del mismo segmento, mas al rectangulo de los dos segmentos.*

DEMOSTRACION (fig. 1. lib. 2.)

1 *La recta AB. està dividida en qualesquiera dos partes, con el punto E: digo, que el quadrado de toda la recta AB. es igual à los rectangulos ABE. y BAE. que se forman de toda la linea, y de sus partes.*

Formense los angulos A. y B. rectos, (prob. 1. n. 3.) y AC. y BD. sean iguales à AB. y junta CD. y seràn AB. CD. iguales, (7. l. 1. n. 1) y AD. serà el quadrado de toda la recta AB. y considerando ER. paralela à BD. y AC. serà AR. el rectangulo de toda la linea AC.

ò

ò AB, y AE; Tambien el rectangulo ED. ferá de toda la linea BD; ò BA. y de la parte EB: Luego el quadrado AD. de toda la linea AB, es igual à los rectangulos AR. ED. formados de toda la recta, y de sus partes, porque se compone de ellos. (9. p.) Lo mismo se demuestra aunque la recta AB. se divida en tres, ò mas partes.

Consectario, si dos rectas AB. AC. son desiguales, y la recta AB. sola se divide, el rectangulo AD. formado de las dos, será igual à los rectangulos AR. ED. formados de toda la recta AC. y de las partes de AB. porque se compone de ellos. Lo mismo milita en el Rhombo, y Rhomboydes, como se ve en la figura.

2. *Si la recta AB. está dividida en E. digo, que el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual á los dos quadrados de las partes AE. EB. y á dos rectangulos AEB. de las mismas partes.* Sea AD. el quadrado de AB. y tomense AF. AE. iguales; y ER. FG. paralelas à AB. AC. y seràn AE. FH. CR. y AF. EH BG. iguales entre sì (7. l. 1. n. 1.) y tambien EB. HG. RD. y si de las iguales AB. AC. quitamos iguales AE. AF: quedaràn iguales EB. FC. (16. P.) conque son iguales EB. HG. RD. FC. HR. GD. (7. l. 1. n. 1.) luego HA. es quadrado de AE; y HD. quadrado de HG que es EB. y HB. es rectangulo de EB. EH. ò EA; y HC. es rectangulo de HF. FC. que son AE. EB. Luego el quadrado de AD. de toda la recta AB. es igual à los quadrados HA. HD. de las partes AE. EB. y à los dos rectangulos HC. HB. de las mismas partes AE. EB. porque se compone de ellos (9. p.)

3. *Si la recta AB. está dividida en E. digo, que el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual al rectangulo BAE. de toda la recta BA. y del segmento AE. mas al quadrado del otro segmento EB. mas al rectangulo de las partes AEB.*

Porque AR. es rectangulo de toda AC. que es AB. y de la parte AE; y HD. es quadrado de HG. ò de EB. y HB. es rectangulo de las partes BE. EH que es EA. (n. 2.) luego el quadrado AD. es igual à los rectangulos AR. HB. y al quadrado HD. porque se componen de ellos. (9. p.) Assi mismo se demuestra, que el quadrado AD. es igual à los rectangulos BR. HC. y qua-

dra-

drado EF. eſto es à los rectangulos ABE.BEA y quadrado de AE.

4 *Si la recta AB. eſtá dividida en E. digo, que el quadrado de toda AB. con el quadrado de vn ſegmento AE. es igual à dos rectangulos BAE. de toda, y del ſegmento AF. con el quadrado del otro ſegmento EB.* Porque ſupueſta la miſma conſtrucion, los rectangulos AG. AR. ſon de toda la linea AB. ò AC. y del vn ſegmento AE. ò AF. luego porque AG. AR. incluyen los dos rectangulos HB. HC. y dos vezes al quadrado AH. Si les añadimos el quadrado HD. del otro ſegmento EB. excederàn à todo el quadrado AD. en vn quadrado AH. Luego el quadrado AD. con el quadrado AH. es igual â los dos rectangulos AG. AR. con el quadrado HD.

5 *Si la recta AB. eſtá dividida en E. digo, que el rectangulo BAE. de toda, y del ſegmento AE. es igual al quadrado del miſmo ſegmento AE. y al rectangulo de los dos ſegmentos AE. EB. que es EG.* Porque ſi las perpendiculares AF. EH. BG. ſe toman iguales al ſegmento AE. ſerà AH. quadrado de AE. (def. 1.) y EG. rectangulo de los ſegmentos EB. EA. ò EH; y AG. rectangulo de toda AB. y del ſegmento AE. ò AF. (def. 3.) Luego el rectangulo AG. de toda, y del ſegmento AE. es igual al quadrado AH. y al rectangulo EG. Eſto es al quadrado AE. y al rectangulo AEB. porque ſe compone de ellos (9.p.) lo miſmo ſe demoſtrarà del rectangulo ABE que es BR.

DEMOSTRACION DEL NVM. 2. CON ESTILO ANAlytico.

Supueſto, que toda la recta AB. eſtà dividida en E. digo (9.p.) que ABA. = AEA. + EBE. + 2. BEA. (nota def. 4. l. 2.) De otra manera, *toda la linea AB. que eſtà dividida en E. llameſe E. cuyo valor es 8. pies. La parte EB. cuyo valor es 6. llameſe B. y la parte AE. cuyo valor es 2. llameſe* A. digo (9.p.) que es toda la E. = A. + B. luego multiplicando cada banda por ſi miſma, ſerà (9.p.) EE. = AA. + 2. AB. + BB. q̃ es lo que ſe avia de demoſtrar. Aunque eſta demoſtracion, y otras ſemejantes, ſean dificiles de entender à los principiantes, que no eſtan verſados en los rudimentos del Algebra; no lo ſeràn à los eſtudioſos que tengan algun principio de ſu algorithmo.

E PRO-

PROPOSICION 2.

Division de la recta en dos partes desiguales.

(a) 8.l.2. *1 (a) El quadrado de toda, es igual á quatro rectangulos de las partes, con el quadrado de su diferencia.*

2 Los dos quadrados de las partes, son iguales á dos rectangulos
(b) *de las mismas, con el quadrado de su diferencia.*

10.l.2. *3 (b) Los mismos, son la mitad del quadrado de toda, con el quadrado de su diferencia. Esto es el quadrado de toda, con el quadrado de la diferencia, es duplo de los quadrados de las partes desiguales.*

(c) *4. (c) El quadrado de la parte mayor es igual al quadrado de la*
6.l.2. *menor, con el rectangulo de toda la linea, y de la diferencia.*

DEMOSTRACION, (fig. 2. lib. 2.)

I. Si la recta AB. está dividida desigualmente en E. digo, que el quadrado de toda AB. es igual á 4. rectangulos AEB. de las partes AE. EB. con el quadrado EN. que ès la diferencia de las mismas partes.

Sea AD. quadrado de AB. y tomense AF. BN. BG. CO. CR. DL. DM. iguales à AE. si estas iguales se quitan de las iguales AB. BD. DC. CA. quedaràn iguales EB. GD. LC. OA. (16. p.) y tambien EN. GM. RL. OF. (16. p.) y tambien EN. HS. XZ. y FO. HX. SZ. por ser lados opuestos en los paralelogramos. (7. l. 1. n. 1.) Conque GL. LO. OE. son rectangulos iguales à EG. formado de las partes BE. y EH. que es EA; y HZ. es quadrado de HS. que es EN. diferencia de las partes: Luego el quadrado AD. de toda là recta AB. es igual a 4. rectangulos EG. GL. LO. OE. y al quadrado HZ. porque se compone de ellos (9. p.)

2 Si la recta AB. está dividida desigualmente en E: digo, que los dos quadrados AE. EB. son iguales á dos rectangulos de AE. EB. con el quadrado de su diferencia. EN. Porque supuesta la misma construccion, serà AH. quadrado de AE; y EM. quadrado de EB; y los rectangulos AS. NM. son iguales al rectangulo EG. que es de las partes AE. EB. porque todos sus lados, y angulos se pueden ajustar, (14 p.) y HZ. es quadrado de HS. que es EN. diferencia de las partes como antes: Luego los dos quadrados AH. EM. son

igua-

iguales a los dos rectangulos AS. NM. con el quadrado HZ. porque se compone de ellos (9 p.)

3 *Si la recta AB. está dividida desigualmente en E: digo, que los dos quadrados de AE. EB. son la mitad delquadro de toda la recta AB, con el quadrado de EN. que es diferencia de las partes. Esto es, que el quadrado de toda la recta AB. con el quadrado de la diferencia EN. es duplo de los quadrados AE. EB; ó de los dos rectangulos de AE. EB. con el quadrado de la diferẽcia, sus iguales, (11 p)*

Supuesta la misma construccion, continùense FG. y OM. que GP. y MQ. sean iguales à HS. ó EN. con que será MP. quadrado de GP. que es la diferencia de las partes EN. y será igual â HZ. (14. p) y los quatro rectangulos FN. NM. MR. RF. serân entre si iguales, por ajustarse: (14 p.) y porque los dos rectangulos FN. NM. con el quadrado HZ. son iguales a los dos quadrados AH. EM. (n. 2.) Los otros dos rectangulos MR. RF. con el quadrado MP. serân otra vez iguales a los dos quadrados AH. EM: Luego los 4. rectangulos FN. NM. MR. RF. con los dos quadrados HZ. MP. contienen dos vezes a los quadrados AH. EM: Luego porque los 4. rectangulos FN. NM. MR. RF. y los dos quadrados HZ. MP. son iguales al quadrado AD. y MP. (9. p.) El quadrado AD. de toda la recta AB. con el quadrado MP. que es la diferencia de las partes, contiene dos vezes a los quadros AH. EM. y assi es duplo: Y por consiguiente los quadrados de AE. y EB. son la mitad de los quadrados de AB. y EN.

4 *Si la recta AB. está dividida desigualmente en E: digo, que el quadrado de la parte mayor EB. es igual al quadrado de la menor AE. con el rectangulo de toda la linea AB y de la diferencia de las partes EN.* Supuesta la misma construccion, son iguales los quadrados AH: NG. y tambien los rectangulos ZG. ZR. (14. p.) Y EM. es quadrado de EB: Luego porque el quadrado EM. es igual a los rectangulos EZ. ZG. con el quadrado GN. *pues se compone de ellos* (9 p.) Si en lugar de ZG. substituymos su igual ZR. será EM. igual à EZ. ZR. que son EL. con el quadrado GN. (15 p.) Luego EM. quadrado de la parte mayor EB. es igual al rectangulo EL. de toda la recta ER, que es AB; y de EN. diferencia de los

segmentos AE. DB. con el quadrado GN. que es AH. quadrado de la parte menor AE. &c.

DEMOSTRACION DEL N. 3. CON ESTILO ANALYTICO

Los quadrados ABA. + ENE. ò GPG. ∽ 2 EBE. + 2 EAE. en que està dividida toda la linea (9. p.) De otro modo. *Toda la linea AB. de 8 pies, que està dividida en E. en partes desiguales, llamese E. y la linea AE. de 2. pies, llamese A; y BE. de 6. pies, llamese B. y la parte EN. de 4. pies, diferencia de las partes, llamese N.* Digo (9. p.) que es E. ∽ A. + B. Luego (demost. 2. n. 2. l. 2.) el quadrado ee. ∽ aa. + 2. ab. + bb. Luego (15. p.) ee. + nn ∽ aa. + 2 ab. + bb. + nn: luego ee. + nn + q. aa. + bb. (16. p.) pero (2. n.) aa. + bb. ∽ 2 ab. + nn. Luego cada parte de por sì de la igualacion es la mitad del todo aa. + 2 ab. + bb. + nn y juntos, cabalmente le componen: luego ee. + nn. es duplo de cada parte de por sì; y como ee. + nn.. aa. + bb:: ee. + nn.. 2. ab. + nn. (13. p.) que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 3.

DIVISION DE LA RECTA EN DOS PARTES IGUALES, y dos desiguales.

1. (a) *El quadrado de la mitad de la linea es igual al rectangulo de las partes desiguales, con el quadrado del segmento intermedio.*

(a) 5. l. 2. 2. (b) *Los quadrados de las partes desiguales exceden á dos de las iguales, en dos quadrados del segmento intermedio.*

(b) 9. l. 2. 3. *El quadrado de toda es igual á dos rectangulos de las partes desiguales, mas á dos quadrados de las iguales, mas á dos quadrados del segmento intermedio.*

4. *El quadrado de toda es quadruplo del quadrado de la mitad de la linea.*

CONSTRUCCION DE LA (fig. 3. del l. 2)

En la figura 3. del lib. 2. la recta AB. està dividida igualmente en E. y desigualmente en N. las partes iguales son AE EB. las desiguales AN. NB. y el segmento intermedio EN. formado el quadrado AD. tomense BG. DM. DL. CQ. AF, iguales á BN; y *y BO. à T. CR. iguales á BE. y si de las iguales EB. BO. se quitan las iguales BN. BG. quedarán iguales EN. GO. (15. p.) y por ser iguales EN. HS. XI. tambien GO. SI. HX. en los paralelogramos (7. l. 1. n. 1.) será HI. quadrado del segmento intermedio; (def. 1.) y EO. quadrado de la mitad EB; y AS. rectangulo de las partes desiguales AN. NS. que es NB. (def. 3.) y NG. quadrado de la parte menor NB; y AZ. quadrado de la parte mayor AN.*

1 *Esto supuesto, digo, q̃ el quadrado EO. de la mitad de la linea AB. es igual al rectangulo AS. de las partes desiguales AN. NB: mas al quadrado HI. del segmento intermedio HS. ó EN.* Porque el rectangulo AH. es igual à NO, (14. p.) y añadido el comun HN. (15. p.) serâ todo el rectangulo AS. igual al gnomon HNBO. (def. 4.) y porque dicho gnomon con el quadrado HI. es igual al quadrado EO. que de ellos se compone (9. p.) si en lugar del gnomon HNBO. substituymos el paralelogramo AS. su igual, serà el quadrado EO. igual al rectangulo AS. de las partes desiguales, y al quadrado HI. del segmento intermedio EN.

2 *Los dos quadrados AZ. NG. de las partes desiguales exceden á los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales, en dos quadrados XS. XZ. del segmento intermedio EN.* Porque el rectangulo QR. es igual à EG. (14. p.) y añadido el espacio comun QE. serân (15. p.) QE. EG. tanto como EC. que se compone de los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales: luego porque los quadrados AZ. NG. de las partes desiguales exceden à QE. EG. en los dos quadrados SX. XZ; tambien excederàn AZ. NG. à los quadrados AX. XC. de las partes iguales en dos quadrados SX. XZ. del segmento intermedio EN. (11. p.)

3 *El quadrado AD. de toda la recta AB. es igual à los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales, mas á los dos quadrados SX. XZ. del segmento intermedio, mas á dos rectangulos AS. de las partes desiguales.* Porque el rectangulo AS. se demostrò igual al gnomon HNO. (n. 1.) y el gnomon HNO. es igual à OLP. (14. p.) Luego dos rectangulos AS. son tanto como el espacio HNOLP. (11. p.) luego porque todo el quadrado AD. es igual â todas las partes de que se compone AX. XC. XS. XZ. y â HNOLP. (9. p.)

se

será el quadrado AD. igual à los dos quadrados de las partes iguales AX. XC. y à los dos del intersegmento XS. XZ. mas à 2. rectangulos HS. (11.p.)

4 *El quadrado AD. de toda la linea, es quadruplo del quadrado AX. de la mitad AE.* Porque el quadrado AD. es igual à los 4. quadrados iguales AX. BX. CX. DX. (14.p.) luego es quadruplo de cada vno.

DEMOSTRACION DEL NVM. 1. CON ESTILO ANAlytico.

Esto es AEA ⌒ ANB + ENE. ò sino el quadrado OE. ⌒ HBI + XS. porque se compone de estos. (9.p.) De otra manera; *Hypothesis. Si toda la linea AB. de 12. pies, està dividida en E. en dos partes iguales AE. y EB. y en dos desiguales AN. y NB. y cada parte de las iguales de 6. pies, se llama E; y la parte desigual AN. de 10. pies, se llama A; y la otra parte desigual NB. de 2. pies, se llama B; y la semidiferencia de las partes desiguales EN. de 4. pies, se llama N. Digo, que el quadrado de E. de la mitad de la linea, es igual al producto equiangulo de las partes desiguales E + N. y E — N. (esto es de AN. por NB.) y al quadrado de N. semidiferencia.* Porque el producto de vna de las partes iguales es EE. y el de las desiguales, es EE. — EN + EN — NN. y el quadrado de N. es NN: luego será EE ⌒ EE — EN + EN — NN. + NN. y desembarazando la igualacion, quedarà el quadrado EE. ⌒ EE. El todo à todas sus partes juntas. *De otro modo.* Multipliquese E + N. por + B. y será el producto EB + NB. à quien si se le añade el quadrado NN. será todo el producto EB + NB. + NN. ⌒ EE. (9. p.) esto es el quadrado EO. de la mitad de la linea, es igual à todas sus partes juntas, que le componen, que son el rectangulo AS. ò gnomon su igual EGI. y al quadrado HI. de la semidiferencia EN. que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 4.

DE LA POTENCIA DE LOS LADOS DE LOS triangulos.

(a) 47.l.1. 1 (a) *La base opuesta al angulo recto, puede tãto como los dos lados*

2.

2 (b) *La base opuesta al angulo obtuso, puede mas dos rectangulos de vn lado, y su continuacion, hasta el perpendiculo.* (b) 12.l.2.

3 (c) *La base opuesta al angulo agudo, puede menos dos rectangulos de vn lado, y de su segmento, entre el perpendiculo, y dicho angulo agudo.* (c) 13.l.2.

4 (d) *Si vna base puede tanto como los dos lados, el angulo opuesto es recto; si puede mas, es obtuso; si puede menos, es agudo.* (d) 48.l.1.

DEMOSTRACION. (fig. 4. lib. 2)

1 *El triangulo ABC. tiene el angulo B. recto: digo, que la base, ó lado opuesto AC. puede tanto como los dos lados AB. BC. Esto es, que el quadrado de AC. es igual á los dos quadrados de AB. BC.*

Construccion. *Continuese BAD. que AD. BC. sean iguales; y sean DH. DL. dos quadrados iguales de DB; tomando GE. HF. DM. PQ. BN. iguales á BC. se tiran las rectas, como se ven en la figura.*

Si por ser iguales DP. DB. BH. HG. &c. quitamos iguales DM. DA. BC. HF. GE. quedaran iguales AB. CH. FG. ED. MP. QL. QO. ON. NL. (15. p.) y por ser los angulos P. L. D. B. G. H. rectos iguales, y comprehendidos de iguales lados BA. BC. á DE. DA. &c. Los 8. triangulos a. c. e. g. b. d. h. f. seràn en todo iguales (4 l. 1. n. 2) y porque el angulo B. es recto, los dos CAB. BCA. que es DAE. hazen otro recto (3 l. 1 n. 5) y porque los tres DAE. EAC. CAB. hazen dos rectos (1 l. 1 n. 1) serà EAC. recto: y assi mismo se demuestran rectos E. F. C; y AF. con angulos rectos, y lados iguales, serà el quadrado de AC; y DO. quadrado de DA. que es BC; y OL. quadrado de ON. que es AB: Luego si de los quadrados iguales DL. DH. quitamos los triangulos iguales a. c. e. g. de DH; y b. d. h. f. de DL. quedarà el quadrado AF. igual à los dos quadrados DO. OL. Esto es el quadrado de AC. igual à los quadrados de BC. y BA.

(fig. 5. lib. 2.

2 *Sea el triangulo ARC. obtusangulo; y R. sea el angulo obtuso. Continuese vno de sus lados ARB. y sea CB. su perpendicular: digo, que el quadrado de AC. excede à los dos quadrados AR. RC. en dos rectangulos ARB.* (def. 4. nota.) Sea BL. quadrado de AB; y BH de BC, y tomando BG. igual à BR. sean RZ. GE. paralelas à BD. BA. y serà FB. quadrado de RB; y FL. quadrado de EF, que es

AR.

AR. En el triangulo RBC. porque el angulo B. es recto, es el quadrado de RC. igual a los dos quadrados BF. BH. (n. 1) y el quadrado de AR. es FL: Luego los dos quadrados de AR. RC. son tanto como FL. FB. BH. y en el triangulo ABC, por ser el angulo B. recto, el quadrado de AC. es igual a los dos quadrados de AB. BC. (n. 1.) que son BL. y BH: luego porque los quadrados BL. BH. exceden à LF. FB. BH. en dos rectangulos FA. FD. tambien el quadrado de AC. excede a los quadrados de AR. RC. en los dos rectangulos FA. FD. que son dos rectangulos ARB. por ser RF. RB. iguales; y tambien GD. RA, y FG. RB.

(fig. 6. lib. 2.)

3 *El triangulo ASC. tiene el angulo S. agudo, si de vno de los otros dos angulos se tira al lado opuesto vna perpendicular CB: digo, que el quadrado de AC. es menor que los dos quadrados de AS. SC. en dos rectangulos ASB. de todo el lado AS. y del segmento SB.*

Sea BH. quadrado de BC; y SL. de AS; y SF. MD. iguales à SB; y FE. BN. paralelas à SA. SM. con que seran DN. y SG. quadrados de BS; y GL. de EG. que es AB. (7. l. 1. n. 1.) y AF. FN. rectangulos de AS. SF. que es SB. Por ser el angulo B. recto. En el triangulo ABC. el quadrado de AC. es igual a los quadrados de AB. BC. (n. 1.) que son LG. BH; y en el triangulo CSB. por ser el angulo B. recto, el quadrado de CS. es igual a los quadrados de BC. BS. (n. 1.) que son BH. DN: Luego los dos quadrados de AS. y SC. son iguales â LS. BH, y DN: Luego porque LS. BH. y DN. exceden à LG. BH. en los dos rectangulos AF. FN; tambien los dos quadrados de AS. SC. excederàn al quadrado AC. en los dos rectangulos AF. FN. que son dos rectangulos de ASB. (12. p.) con que AC. puede menos, &c.

4 El quarto numero es consectario de lo dicho.

DEMOSTRACION DE EL NUMER. 2. CON ESTILO *analytico.*

Es el quadrado de la linea AB. (1. l. 2. n. 2.) ABA ∽ ARA + RBR + 2r. ARB: Luego ABA + CBC ∽ ARA + RBR + 2r. ARB + CBC, (15. p.) pero (n. 1. desta) el quadrado ACA ∽ ABA.

ABA + CBC: Luego ACA = ARA + RBR + 2r. ARB + CBC; pero (n. 1.) CRC = RBR + CBC: Luego ACA = ARA + CRC + 2r. ARB. que era lo que ſe avia de demoſtrar. De que ſe ſigue que ACA — ARA — CRC = 2r. ARB.

Fin del Libro 2.

DEFINICIONES DE EL LIB. 3.

DEL CIRCVLO, Y SV DIAMETRO. (fig. 1. l. 1. caſo 1.)

1 *Linea circular*, es vna linea obliqua, diſtante igualmente de vn punto, que eſtà en medio del eſpacio comprehendido.

2 *Circulo*, es el eſpacio que comprehende vna linea circular.

3 *Centro*, es el punto medio del circulo.

4 Ambito, perimetro, peripheria, ò circunferencia, es la dicha linea circular, que comprehende, ò ciñe al centro.

NOTA.

Que ſe deſcrive el circulo, ſi la linea EB. dà vna buelta entera, ſin que el punto E. ſe mueva, y el punto E. ſerà el centro. De donde ſe infiere, que todas las rectas del centro a la circunferencia, ſon iguales entre sì, porque todas ſon iguales a la recta EB. con la que ſe deſcriviò el circulo.

5 *Radio, ò Rayo, ò ſemidiametro*, es la recta, tirada del centro del circulo, y termina en ſu circunferencia.

6 *Diametro del circulo*, es la recta, que paſſa por el centro del circulo, y termina en la circunferencia por vna, y otra parte.

NOTA.

Que todos los diametros ſon iguales, como AB. CD. porque cada vno ſe compone de dos radios iguales, (nota def. 4. deſte.) Qualquier diametro parte al circulo en dos partes iguales, porque ſi la parte ADB. ſe dobla ſobre el plano ACB. tirando infinitos radios, como EC. EF. todos por ſer iguales, ſe terminaràn en las dos circunferencias: porque ſi alguno cayere fuera, ſeria mayor, y ſi dentro menor: Luego qualquier punto del arco ADB. ſobre otro ACB y cada vn arco ſe ajuſtarà ſobre el otro, y ſeràn iguales, (14 p.) y cada vno ſerà la mitad del circulo.

Diuision, ó partes del circulo.

Qualquiera circulo se imagina dividido en 360. partes, que se llaman grados; y el semicirculo en 180.

7 *Grado*, es vna parte de las 360. en que està dividido el circulo.

8 *Minuto primero*, es vna parte de las 60. en que se imagina dividido el grado.

9 *Minuto segundo*, es vna parte de las 60. en que se imagina dividido el minuto primero; y assi de los demàs minutos 3. 4. &c.

10. *Quadrante*, es la quarta parte del circulo, ò 90. grados.

11 *Arco*, es parte de la circunferencia, como el arco DA. ò AC. &c.

12 *Cuerda*, ò subtensa es la recta, que termina vn arco, como AB. es cuerda del arco ADB. ò BCA. y CB. es cuerda del arco CFB; y tambien del arco CADB.

13 *Segmento*, es el espacio comprehendido entre la cuerda, y el arco, como es el espacio comprehendido entre la cuerda CB. y el arco CFB. ò entre la cuerda CB. y el arco CADB; y porque qualquiera cuerda divide la circunferencia, y circulo en dos arcos, y segmentos, que entre los dos llenan la circunferencia, y circulo; se dize el vn arco complemento del otro.

14 *Sector*, es el espacio comprehendido de vn arco, y de dos radios, que le terminan, como el espacio ECFBE, que està comprehendido del arco CFB. y de los radios CE. BE.

15 *Arcos semejantes*, son los que en circulos desiguales tienen tantos grados el vno como el otro, respecto de su circulo.

16 Segmentos, y sectores semejantes, son los que constan de arcos semejantes, ò de arcos desiguales, pero de iguales grados.

Del angulo, y su medida, ya se dixo en las definiciones del lib. 1. (def. 9. y 10.)

DEL CONTACTO, INSCRIPCION, Y CIRCVNSCRIPCION, fig. 1. Lib. 3.

17. *Punto comun del contacto*, es aquel punto donde vna cantidad toca â otra; y no pueden tener mas, aunque se continuen entrambas. Sucede esto entre dos lineas, vna recta, y otra curva, ò entre dos curvas; ò entre vn angulo, y vna linea recta, ò curva.

18.

18. *Dos circulos se tocan interiormente*, quando el vno estâ dentro del otro, y tienen vn punto comun. Como ARS. AMN. se tocan en A. interiormente, si el punto A. es comun.

19 *Dos circulos se tocan exteriormente*, si el vno està fuera del otro, y tienen vn punto comun. Como HAD. MAN. se tocan en A. si A. es comun.

20. *Tangente del circulo*, es la recta, que tiene con el circulo vn punto comun. Como BC. es tangente de los circulos HAD. MAN. RAS. y los toca à todos, si el punto A. es comun à la recta, y à los tres circulos.

21. *Vn angulo*, toca à la recta, ò la recta al angulo, si tienen vn punto comun. Como el angulo HAD. toca à la recta BC. en A. y la recta al angulo. Lo mismo es de las lineas circulares, y qualesquiera otras curvas, MAN &c.

22 *Figura inscripta en otra*, es la que con sus angulos, toca los lados de la otra, que està exteriormente. (def. 23.)

23 *Figura circunscripta*, es la que exteriormente toca los angulos de la otra, que està interiormente. Como el quadrado AH. està inscripto en BE; y BE. circunscripto à HD. Assi mismo HD. està inscripto en el circulo HFDA. y el circulo circunscripto; y BE. està circunscripto al circulo; y el circulo inscripto en BE. y toca sus lados con la periferea. Lo mismo es de qualesquiera otras figuras, assi respecto del circulo, como de vnas con otras.

24 *Angulo del segmento*, es el angulo mixtilineo, que haze la periferia con la cuerda. Como CBF. Tambien el angulo mixtilineo *se llama de la contingencia* (fig. 1. lib. 3.)

25 *Vn angulo se dize estar en el segmento*, quando le forman dos cuerdas en la periferia del circulo, como es CBA. està en el segmento CFBDGA. (fig. 1.)

26 *El mismo angulo CBA.* se dize, que insiste respecto de la periferia opuesta CA. de tal suerte, que existe en el segmento CBA. è insiste en la periferia CA.

27 *Circunferencia concava*, es el concavo, ò curvatura interior de la linea circular.

28 *Circunferencia convexa*, es la curvatura, ò corcoba exterior de la linea circular.

Otras definiciones del circulo se han puesto en las del Libro primero, donde se podrán ver.

29 Las cantidades, ò figuras inscriptas en otra, ò circunscriptas a ella, se dize, que degeneran, fenecen, ò terminan en ella, quando tanto se puede aumentar la inscripta, ò disminuyr la circunscripta, que la diferencia entre ellas, y aquella, en quien se inscriben, ò circunscriven, sea menor que otra qualquierà cantidad dada, ò dable, v.g. sea (fig. 1.l. 3.) el quadrado AHED. inscripto en el circulo: y serà la mitad del quadrado EB. circunscripto; porque EB. se compone de quatro quadrados iguales al ZB; y el inscripto se compone de 4. triangulos iguales al AZH. que son mitades de aquellos quadrados: (7.l.1.n.2.) siendo pues el circulo menor, que el quadrado EB, serà el quadrado AHFD. inscripto, mayor que la mitad del circulo: (5.l.5. n.1. Luego si este quadrado se quita del circulo, se quita mas que su mitad.

Tambien partiendo los arcos por medio en K. I. L. O. quedarà inscripto vn octagono, y tirada por I. la tangente FI. y alargados los lados AH. y DF. quedarâ formado el paralelogramo FH; cuya mitad es el triangulo FIH. (8.l.1.n.2.) y siendo el segmento del circulo FIH. menor que el paralelogramo, que le ciñe FH. serà el triangulo FIH. mas que la mitad de dicho segmento (5.l.5.n.1.) Luego si dicho triangulo se quita del segmento, el residuo serâ menor que su mitad. Assi mismo los demas triangulos HKA. ALD. &c. son mas de la mitad de sus segmentos: luego si de los segmentos del circulo que quedaron, quitado el quadrado, se quitan dichos triangulos, se quitarà mas que la mitad del residuo. Lo mismo sucederà inscribiendo siempre polygonos de doblados numeros de lados: luego siempre se quitarà del residuo del circulo mas que su mitad: luego llegarase à termino, en que lo que sobrare del circulo serà menos que qualquiera cantidad dada, ò dable: luego los polygonos inscriptos degeneran en el circulo, que es lo que se dize en la (def. 29.) De la misma manera se prueba de los solidos, ò cuerpos regulares, inscriptos en los cilindros; porque se resuelven en ellos. (esta demostracion es del celebre Archimedes.)

Co-

Corolario. De las figuras regulares isoperimetras, è inscriptas (def. 38. l. 1.) en los mismos, ò iguales circulos, la que mas lados tiene, es de mayor area, y assi el quadrado es de menor area del pentagono, y este del exagono &c. Porque la area de qualquiera figura regular es el rectangulo formado de su semiperimetro, y su perpendiculo (prob. 7. n. 2.) luego las figuras isoperimetras tendrân la razon que sus perpendiculos, que siempre es mayor en la de mas lados; y por esso la area del circulo es la maxima.

LIBRO TERCERO DE EUCLIDES,

DEL CIRCULO.

EN este Libro trata Euclides del circulo, y de sus propriedades, cuyas proposiciones son 37. de las quales ay seis problemas, que se dejan para la Geometria practica; y las vltimas tres proposiciones se explicaràn en el libro 6. mas facilmente, porque pertenecen à la proporcion; y las demas se reducen aqui à las siete siguientes.

PROPOSICIONES.

Prop. 1. De las rectas de vn punto a la circunferencia.
Prop. 2. De las cuerdas, arcos, y segmentos.
Prop. 3. De los angulos en el circulo.
Prop. 4. De los circulos concentricos.
Prop. 5. De los circulos que se cortan.
Prop. 6. De los circulos que se tocan.
Prop. 7. De la recta tangente del circulo.

PROPOSICION 1.

De las rectas de vn punto á la circunferencia.

1 (a) *Si de vn punto dentro, ó fuera del circulo, se tiran rectas a la circunferencia concava, la que passa por el centro, es la mayor; y la mas proxima es mayor, que la mas apartada.* (a) 7. 8. 15. 1. 3. (b) 7. 1. 3.

2 (b) *Y solas dos opuestas son iguales;* (c) *con que si de vn punto salen tres iguales, será el centro.* (c) 2. 1. 3.

3

(d) 8.1 3. 3 (d) *Si de un punto fuera del circulo, se tiran rectas á la circunferencia convexa, la que passa por el centro, es la menor, y la mas proxima, es menor, que la mas apartada.*

(e) 8.l. 3. 4 (e) *Y solas dos opuestas son iguales.*

DEMOSTRACION, (fig. 2. lib. 3. casos 1. 2.)

1 *Sea el circulo EFH. y un punto A. dentro, ó fuera del circulo, y el centro O. Tirense las rectas AOG, AF. AE. AH. á la circunferencia concova. Digo 1. que AOG. que passa por el centro O. es la mayor de todas.* Desde el centro O. salgan OF. OE, &c. porque OF. OG. son radios iguales, si se añade el pedazo comun AO, será AOG. tanto como AOF. (15. p.) y en el triangulo AOF. los dos lados AO. OF. son mayores que AF. (5. l. 1. n. 4.) Luego HOG. es tambien mayor que AF. (11. p.) assi mismo AOG. que es AOE. se demostrará mayor que AE. Luego AOG. es la maxima.

Digo 2. que si AF está mas proxima á la maxima AOG. que AE. será AF. mayor que AE. Porque en los triangulos AOF. AOE. son iguales los lados OF. OE. por ser radios iguales, y AO. comun; pero el angulo AOF. mayor que su parte AOE. (9. p.) luego la base opuesta AF. es mayor que AE. (6. l. 1. n. 1.)

2 *Si* AF. AH. *distan igualmente de la maxima* AOG. *esto es, si los arcos* GF. GH. *son iguales: Digo 1. que* AF. *y* AH. *son iguales.*

Porque siendo iguales arcos GF. GH. son iguales los angulos FOG, GOH. (def. 10. l. 1.) y tambien sus complementos al semicirculo FOA. HOA: (1. l. 1. n. 1) Luego porque en los triangulos FOA. HOA son iguales lados OF. OH, y AO. comun, y los angulos comprehendidos AOF. AOH será todo igual (4. l. 1. n. 2.) Y assi AF. y AH; son iguales.

Digo 2. que no puede aver otra linea igual á AF. Porque si cae entre FG. ò GH. distará menos de AOG. y será mayor que AF. y AH. (n. 1.) y si cae fuera distará mas, y será menor: (n. 1.) Luego solas dos pueden ser iguales entre sì. Pero se pueden considerar otras dos mayores, ò menores de las primeras entre sì iguales, de suerte, pue puede aver infinitas, que cada dos sean iguales, sin que admitan otra tercera igual.

Digo 3. que si de un punto salen tres lineas iguales, será el centro.

Por-

Porque sino fuere el centro, solo pudieran salir dos iguales (n. 2)

3. *Si el punto A. está fuera de el circulo, y se tiran rectas AL. AN. AP. á la circunferencia convexa, y AL. continuada, passa por el centro O. digo 1. que es la minima de todas.* (caso 2.) Porque considerada qualquiera otra AN. y tirado el radio ON. en el triangulo AON. los dos lados ON. NA. son mayores que AO. (5. l. 1. n. 4.) luego si de desiguales ONA. OLA. quitamos los radios iguales ON. OL. quedarà NA. mayor que AL. (17. p.) luego si AL. es menor que qualquiera otra, serà la minima.

Digo 2. que si AN. dista menos de la minima AL. que AP. esto es, si el arco LN. es menor que LP. será AN. menor que AP. &c. Porque considerados los radios ON. OP. por estar el punto N. dentro del triangulo AOP. los dos lados ON. NA. son menores que OP. PA. (6. l. 1. n. 5.) luego si quitamos los radios iguales ON. OP. quedarà AN. menor que AP. (17. p.) y assi la mas proxima es menor que la mas remota.

4. *Si AM. AN. distan igualmente de la minima AL. y los arcos LM. LN. ó los angulos MAL. NAL. son iguales: digo 1. que AM. AN. serán iguales.* Porque siendo los arcos LM. LN. iguales, son iguales los angulos MOA. NOA. (def. 10. Lib. 1.) y los lados, ò radios OM. ON. y el lado OA. comun â los dos triangulos OAM. OAN. luego todo lo demas es igual AM. AN. &c. (4. l. 1. n. 2.) La segunda prueba, que AN. es sola igual â AM. es la misma que las del numero 2. prueba 2.

DEMOSTRACION DEL NUM. 1. CON ESTILO ANAlytico, caso 1.

Digo, que la mas proxima AF. *à la maxima* AOG. *es mayor que la mas apartada,* AE. Porque en los triangulos AOF. AOE. que tienen el lado AO. comun, es el lado OF. ⊓ OE; pero el angulo AOF. + que su parte AOE. (9. p.) luego la base opuesta AF. + que AE. (prop. 6. l. 1. n. 1.) y assi de qualquiera otra mas apartada.

PRO-

PROPOSICION. 2.

DE LAS CUERDAS, ARCOS, Y SEGMENTOS.

(a) 2. l. 3. 1. (a) *Toda la cuerda cae dentro del circulo, y las iguales cortan iguales arcos, y al contrario.*

(b) 3. l. 3. 2 (b) *El diametro perpendicular á la cuerda, parte igualmente cuerda, arco, y segmento, y al contrario.*

(c) 4. l. 3. 3. (c) *Los diametros solos se pueden partir igualmente.*

(d) 14. l. 3. 4. (d) *Las cuerdas que igualmente distan del centro, son iguales, y al contrario.*

(e) 15. l. 3. 5 (e) *La que menos dista del centro es mayor, y corta mayor arco, y segmento, y al contrario.*

(f) 26 27 28. 6 (f) *Lo mismo es en dos circulos iguales.*

7. *Los arcos, y cuerdas entre dos paralelas son iguales, y al contrario.*

DEMOSTRACION (*fig. 3. l. 3. casos 1. 2.*)

1. *En el circulo CNM. sea qualquiera cuerda NM. digo, que cae toda dentro del circulo,* (caso 1.) Porque tomando en ella qualquier punto Z. y tirados los radios BZE. BN. BM. en el triangulo isosceles BNM. seràn iguales los angulos N. M. (5. l. 1. n. 2.) y porque en el triangulo BMZ. el angulo externo BZN. es mayor que el interno opuesto M. (5. l. 1. n. 2.) serà tambien BZN. mayor que N. (11. p.) luego en el triangulo BNZ. el lado BN. que es BE. serà mayor que BZ. (5. l. 1. n. 3.) luego porque el punto E. està en la circunferencia, qualquier punto Z. dista menos del centro, y cae dentro del circulo; y si todos los puntos de NM. caen dentro, toda ella estâ dentro.

Cuerdas iguales cortan iguales arcos, y segmentos (*caso 2.*) Porque si FE. RC. son cuerdas iguales se ajustaràn (14. p.) y tambien todo el arco ESF. con RHC. por ser todos los radios iguales, y el segmento ESFGE. con RHCDR: luego todo es igual, y al contrario si los arcos, y segmentos son iguales porque se ajustaràn, &c.

2 *Si el radio BS. ó diametro CBS. es perpendicular á la cuerda MN. digo que la cuerda, y arco MN. y el segmento NSM. se dividen en partes iguales, y al contrario* (*casos 1. 2.*) Porque tirados los

ra-

radios iguales BN. BM. serà el triangulo BNM. isoceles: luego la perpendicular BOS. parte igualmente la cuerda, ò base MN. en O; y tambien al angulo NBM. (5 l. 1. n. 6.7.) luego por ser iguales los angulos NBS. SBM. seràn iguales sus medidas, ò arcos NS. SM. (def. 10. lib. 1) y doblando el Sector NBS. se ajustarà con SBM; y quitando los triangulos iguales NBO. OBM. quedarâ el segmento NOS. ajustado, è igual con OSM. (16.p.) y assi todo se parte igualmente.

Al contrario. Si el radio BS. parte igualmente la cuerda NM. ò el angulo NBM. que es el arco NSM. ò el segmento en el triangulo isoceles NBM. serà BS. perpendicular à NM; y si BS. es perpendicular à NM. y la parte igualmente, passa por el centro, ò vertice B. (5. l. 1. n. 6. 7.) y serà SBC. diametro.

Consectario. Si el diametro no es perpendicular à la cuerda, no la parte igualmente; y si no la parte igualmente, no es perpendicular.

3. *Los diametros solos HE. CS. se parten igualmente,* (*caso* 2.) Porque (nota def. 6. l. 3.) todos los radios BH. BE. BC. BS. son iguales; luego ningunas otras rectas mutuamente se pueden partir igualmente fuera del centro: Porque si MN. està igualmente dividida en O. el radio BOS. haze el angulo BOM. recto (n. 2.) y considerada qualquiera otra FOP. (*caso* 1.) serà el angulo BOP. obliquo: luego porque el radio BOS. no es perpendicular à FP. no se parte esta igualmente en O. (consect. n. 2.) y aunque el diametro parta igualmente â la cuerda en angulos rectos, pero no parte la cuerda al diametro igualmente.

Consectario. Si dos rectos en el circulo se parten igualmente son diametros, y su interseccion es el centro.

4 *Si RC. FE. son iguales, las distancias del centro, ó perpendiculos BD. BG. seràn iguales* (*caso* 2.) Porque tambien los radios BC. BR. BF. BE. son iguales, se ajustarà todo el triangulo FBE. con RBC. y tambien el perpendiculo BG. con BD. (4. l. 1. n. 1.) y el arco ESF. con RHC. luego todo es igual.

Al contrario. Si las distancias, ò perpendiculos BD. BG. son iguales, y se considera el triangulo BFE. sobre BCR. se ajustarà

BG. con BD. y por ser los angulos (n.2.) en G. y D. rectos iguales, se ajustarà FE. con RC. (14.p.) y assi son iguales; y tambien los arcos, y segmentos.

5. *Si NM. es mayor que FE. cortarà mayor arco.* Porque en los triangulos NBM. FBE. son iguales NB. BM. à FB. BE; y por ser NM. mayor base, que FE. (por suposicion) es el angulo NBM. mayor, que FBE. (6. l. 1.n.1.) y el arco, ò su medida NSM. mayor que FSE. (def. 10. lib. 1.)

Al contrario. Si el arco es mayor, serà el angulo NBM. mayor que FBE. (def. 10. lib. 1.) luego la base NM. mayor es, que FE. (6. l. 1. n. 1.)

Si NM. es mayor, que FE. distarà menos del centro. Porque consideradas NM FE. paralelas, serâ BOS. perpendiculo comun, (def. 25. consect. 2. l. 1.) y el arco FSE. es menor, que NSM (5. n.) y assi FE. cae debajo de NM. luego el perpendiculo, ò distancia BG. mayor que su parte BO. (9.p.) y al contrario. Si la distancia BG. es mayor que BO. la paralela FE. caerà debajo de NM. &c. Lo mismo se demuesta, aunque las cuerdas desiguales no sean paralelas, porque la menor se puede hazer paralela à la mayor, &c.

6. Todo lo que se ha dicho de vn circulo, conviene à dos circulos iguales, porque se pueden ajustar, y formar vn circulo (14. p.)

7. *Los arcos, y cuerdas de vn circulo NF. EM. entre dos paralelas, son iguales.* Porque el perpendiculo BS. es comun (def. 25. consec. 2. lib. 1.) y SN. SM. iguales, y tābien SF. SE. (n. 2.) luego quedan FN. EM. iguales. (15. p.) *Al contrario.* Si NF. EM. son iguales, y BS. perpendicular à NM. seràn iguales NS. SM. (n. 2.) y quedaràn iguales FS. SE. (15. p.) luego BS. es perpendicular à FE. (n. 2.) y porque NM. FE. tienen perpendiculo comun son paralelas (def. 25. consec. 2. l. 1.)

DEMOSTRACION DEL NVM. 5. CON ESTILO ANAlytico.

Probarè 1. que el diametro al. es la mayor linea, y 2. que la linea NM. mas cercana al centro es mayor, que FE. mas apartada.

De-

Demostracion. En el triangulo NBM. son (5.l. 1. n. 4.) los lados NB. +- MB. +- q. NM; pero (def. 8. l. 1.) NB. ⎍ Ba. y BM. ⎍ BL. porque son radios: luego NB. +- BM. ⎍ aB. +- BL. que es el diametro mayor que NM. Esto es aL. +- que NM. (12 p.) 2. en los triangulos NBM. y FBE. el lado NB. ⎍ BF. y el lado BM. ⎍ BE. por ser todos radios iguales; (def. 8. l. 1.) pero el angulo NBM. +- q. FBE. el todo mas que su parte. (9. p.) Luego la base NM. +- q. FE. (prop. 6. l. 1. n. 1.) y si el perpendiculo que cae sobre la base FE. es igual al que cae sobre la cuerda RC. serà tambien NM. +- que RC. (13. p.)

PROPOSICION 3.

DE LOS ANGULOS EN EL CIRCULO:

1. (a) *El angulo en la circunferencia es la mitad del angulo en el centro, y del arco en que insiste.* (a) 20.l.3.

2. *El angulo dentro del circulo es la semisuma, y fuera, es la semidiferencia de los arcos que corta.*

3. *Si el angulo es la mitad del arco, estarà en la circunferencia.* (b)

4. (b) *Los angulos de vno, iguales, ò semejantes segmentos son iguales, y al contrario.* 21.28 29.l.3 y 33.l 6.

5. (c) *Si vn quadrilatero està en el circulo, sus angulos opuestos son iguales à dos rectos, y al contrario.* (c) 22.l.3.

6. (d) *El angulo en el semicirculo es recto; en el segmento mayor es agudo; en el menor es obtuso.* (d) 31.l.3.

DEMOSTRACION, fig. 4. lib. 3. caso 1.

1. *El angulo BCF. està en la circunferencia, y BOF. en el centro: Digo, que BCF. es la mitad de BOF. y del arco BGF.* en que insiste.

Tirado el diametro COG. en el triangulo isoceles COF. son iguales los angulos CFO. OCF. (5.l. 1.n.1.) y el angulo externo GOF. es igual à los dos internos opuestos C. y F. (3.l.1.n. 2.) luego es duplo de cada vno; y assi OCF. es la mitad de GOF; y porque el arco FG. es la medida de GOF. (def. 10. lib. 1.) serà OCF. la mitad de GF. Assi mismo se demostrarà, que BCG es la mitad de BOG. y del arco BG: luego los dos angulos BCG. GCF. que son BCF. son la mitad de los dos BOG. GOF. que son BOF. y del arco BGF.

Si el angulo FCE. no incluye al centro: tirense el diametro COG. y los radios OF. OE. y se demostrara como antes, que el angulo GCE. es la mitad del arco CFE. y el angulo GCF. mitad de GF. y si del arco GFE. quitamos GF. quedarà FE. Luego si de la mitad de GFE. quitamos la mitad de GF. queda la mitad de FE. luego si de GCE. que es mitad de GFE. quitamos GCF. que es mitad de GF. quedarà FCE. mitad de FE. que es el arco en que insiste, (def. 25. l. 3.) y tambien mitad del angulo FOE.

2. *Si el angulo BAF. està dentro del circulo, y se continuan sus lados verticales: digo, que el angulo BAF. es la mitad de los dos arcos, que corta BF CE. (caso 2.)* Tirada BC. en el triangulo BAC. el angulo externo BAF. es igual à los dos internos opuestos BCA. ABC. (3. l. 1. n. 2.) y BCA. la mitad de BF. Como ABC. mitad de CE. (num. 1.) luego BAF. que es igual à BCA. y â ABC. es la mitad de los dos BF. CE.

Pero si el angulo BDC. està fuera del circulo, y corta los arcos BC. GE. digo, que es la mitad de la diferencia entre los dos arcos. Tirese GL. paralela à DEC. y serà el arco CL. igual â GE. (2. l. 3. n. 7.) y BL. diferencia de CB. y CL. ò GE. y los angulos BGL. BDC. en las paralelas seràn iguales (def. 25. l. 1. consec. 1.) y el angulo BGL. en la circunferencia es la mitad de BL. (n. 1.) luego BDC. que es igual â BGL es tambien la mitad de BL. conque es la mitad de la diferencia entre los dos arcos BC. GE. ò CL.

3. *Si el angulo BCE. es la mitad del arco BFE. digo, que el punto C. està en la circunferencia.* Porque si el punto C. estuviere dentro, ò fuera del circulo, el angulo BCE. seria mas, ò menos que la mitad del arco BFE. (n. 2.) Luego sino es mas, ni menos, està C. en la circunferencia.

4 *Si en el segmento BCF. ay dos, ó mas angulos BCF. BEF: digo que son iguales.* Porque cada vno es la mitad del arco opuesto BF. (n. 1.) lo mismo es en los segmentos iguales de iguales circulos, porque se ajustan (14. p.) y tambien en los segmentos semejantes de circulos desiguales: porque los arcos semejantes tienen igual valor (def. 10. l. 1) y (def. 15. l. 3.)

Al contrario. Si los angulos en la circunferencia son iguales, los arcos opueſtos, que ſon duplos de los angulos, tendràn igual valor (11.p.) y aſsi ſeràn iguales en iguales circulos, ò ſemejantes en deſiguales.

5. *Si el quadrilatero BCEF. eſtá inſcripto en el circulo: digo, que ſus angulos opueſtos B. y E: y tambien C y F, ſon tanto como dos rectos.* Porque el angulo CBF. es la mitad del arco CEF. y el angulo CEF. mitad del arco CBF. (n. 1:) luego porque los dos arcos CEF. CBF. ſon todo el circulo, los dos angulos CBF. CEF. ſeràn vn ſemicirculo, eſto es tanto como dos rectos (def. 10. l. 1.) aſsi miſmo BCE. BFE. ſeràn tanto como dos rectos, y al contrario.

6. *Si BCE. es ſemicirculo, digo, que qualquiera angulo BCE. ſerá recto.* Porque es la mitad del ſemicirculo opueſto BGE. (n. 1.) luego es recto.

Si el ſegmento BCF. es mayor que el ſemicirculo, qualquier angulo BCF. ó BEF. ſerá agudo. Porque es la mitad del arco opueſto BF. (n. 1.) y eſte menor, que vn ſemicirculo, porque ſe ſupone BCF. mayor: luego el angulo BCF. es menos que vn angulo recto, y aſsi es agudo; (def. 10. l. 1.)

Si el ſegmento CEF. es menor que el ſemicirculo, qualquier angulo CEF. ſerá obtuſo. Porque es la mitad del arco opueſto en que inſiſte CBF. que es mas que el ſemicirculo: (n. 1.) luego ſu mitad es mas que vn quadrante, ò que vn angulo recto, y aſsi CEF. es obtuſo. *Al contrario.* Si el angulo es recto, eſtarà en el ſemicirculo; ſi agudo, en el mayor ſegmento; ſi obtuſo en el menor.

DEMOSTRACION DEL NVM. 1. CON ESTILO ANAlytica, (caſo 1.)

Eſte theorema tiene tres caſos, el 1. quando coinciden los lados, como BO. y OE. en los angulos BOF. y BEF. 2. quando no coinciden, no cortandoſe como en los angulos BOF. y BCF. 3. quando no coinciden cortandoſe los lados, como en los angulos FOE y FCE. Demoſtrarè ſolamente el primer caſo, por no dilatarme.

En el triangulo OEF. el lado OE. ∽ OF. por ſer iguales radios, (def. 8. l. 1.) luego el angulo OEF. ∽ OFE. porque iguales

les lados se oponen à iguales angulos (5. l. 1. n. 1.) Pero el angulo BOF. $\sqcap$ BEF. + OFE. el externo â los dos internos opuestos (3. l. 1. n. 2.) luego BOF. $\sqcap$ 2. BEF.

PROPOSICION 4.

DE LOS CIRCULOS CONCENTRICOS

1. Los circulos concentricos, ó que tienen vn mismo centro, distan igualmente, ó al contrario.

2. El angulo del centro corta arcos semejantes, y el de la circunferencia de semejantes.

3. Si la recta, que los corta, no passa por el centro, cortará arcos de semejantes.

4. Pero los intersegmentos de dicha recta serán iguales.

DEMOSTRACION (fig. 5. l. 3.)

1. *Los circulos BSG. CRL, tienen vn mismo centro O. digo que son equidistantes.* Porque los radios OB. ON. OS. OG. son iguales: luego si quitamos los radios tambien iguales OC. OM. OP. OH. quedaràn iguales distancias CB. NM. PS. HG. (15. p.) *Al contrario.* Si fuere O. el centro del circulo mayor, y las distancias CB. NM. HG. iguales, quitadas de los radios iguales OB. ON. OG. quedaràn iguales OC. OM. OH. (15. p.) luego porque de O. salen tres rectas iguales à la circunferencia CMEH. serà O. tambien centro del circulo menor (1. l. 3. n. 2.)

2. *El angulo SOH. formado en el centro O. corta los arcos PEH. SFG. semejantes:* Porque son medida de vn mismo angulo SOH. (def. 10. l. 1.) *El angulo NGS. en la circunferencia NB. GFS. corta los arcos MR. NS. de semejantes.* Porque es la mitad del arco NS. (3. l. 3. n. 1.) y la mitad de MR. menos la mitad de HL. (3. l. 3. n. 2.) luego el valor de MR. excede à NS. en todo el arco HL; y son NS. MR. de semejantes.

3. *Si la recta SG. corta los dos circulos, y no passa por el centro, los arcos REL. SFG. son de semejantes.* Porque tirados los radios OS. OR. OL. OG. serà el angulo SOG. mayor que su parte ROL. (9. p.) luego el arco SFG. que es medida de SOG. es de mayor valor, que REL. (def. 10. l. 1.) y assi son de semejantes.

En

4. *En suposicion que la recta GS. no passa por el centro digo, que los intersegmentos SR. LG. y tambien SL. RG. son iguales.* Porque si el radio OF. es perpendicular à la cuerda SG. seràn iguales SZ. ZG; y tambien ZR. ZL. (2. l. 3. n. 2.) luego quitadas estas, quedaràn iguales SR. LG; (15. p.) y si â las iguales SR. LG. se añade la comun RL. seràn iguales SL. RG. (15. p.)

Consectario. *Lo mismo es en los circulos excentricos, si la cuerda es perpendicular al diametro comun.*

DEMOSTRACION DEL NVM. 4. CON ESTILO ANAlytico.

Es el intersegmento SR. ∽ LG; tambien SL. ∽ RG. Porque si el radio OF. es perpendicular â la cuerda SG. seràn ZS. ∽ ZG. y ZR. ∽ ZL. (2. l. 3. n. 2.) luego SZ. — ZR. ∽ ZG. — ZL. esto es SR. ∽ LG. (15. p.) luego SR. + RL. ∽ LG. + RL. esto es SL. ∽ RG. (15. p.) que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 5.

DE LOS CIRCVLOS QVE SE CORTAN. (a)

1. (a) *Si se cortan no tienen centro comun.* 5. y 6. l. 3.
2. (b) *La interseccion es en solos dos puntos.*
3. *La recta, que junta los centros es perpendicular à la cuerda comun, y parte igualmente cuerda, arcos, y segmentos, y al contrario.* (b) 10. l. 3.
4. *Todas las rectas de la interseccion cortan arcos semejantes en uno, y otro circulo.*

DEMOSTRACION, fig. 6. l. 3.

1. *Los circulos, que se cortan no tienen vn mismo centro.* Porque si fuerae concentricos, serian equidistantes, y paralelos (4. l. 3. n. 1.) y por consiguiente no se cortaràn: luego si se cortan, no tienen vn mismo centro.

2. *Los circulos mqh. ngh. se cortan: digo, que la interseccion es solo en dos puntos n. h.* Porque siendo C. el centro de ngh. no es centro de mqh. (n. 1.) y assi del punto C. solas dos rectas iguales pueden salir â la circunferencia concova ngh. (1. l. 3. n. 2.) luego porque todas las rectas de C. â la circunferencia ngh. son radios

dios iguales (nota def. 6. l. 3.) solos dos puntos de ella n. h. son comunes à la circunferencia convexa nqh; y assi la interseccion de mqh. y ngh. es en solos los dos puntos n. h.

3. *El diametro OCA. por los centros O. C. de dichos circulos, es comun à ellos; y siendo tambien comun la cuerda nh. digo, que el diametro comun OCA. es perpendicular á nh. y parte igualmente cuerdas, arcos, y segmentos.* Porque los triangulos OnC. OhC. tienen los lados On. Oh. iguales; y tambien Cn. Ch. y OC. comun: luego todo es igual (4. l. 1. n. 1.) el angulo nOC. à COh. y nCO. à OCh: luego en el triangulo isoceles nOh. la recta Oy. que parte igualmente al angulo nOh. es perpendicular â la base nh: (5. l. 1. n. 6. 7.) luego porque los radios Oq. Cg. son perpendiculares â la cuerda comun n. h. parten igualmente â la cuerda en Y. y à los arcos ngh. nqh. en g. q; y tambien à los segmentos (2. l. 3. n. 2.) *Al contrario.* Si por el centro O. passa Oy. perpendicular à nh. la partirà igualmente, y si la parte igualmente serà perpendicular &c.

4. *Si de la interseccion, h. se tiran las lineas hm. hp. hn. &c.* digo, que los arcos mp. gd. son semejantes. Porque el punto h. està en las dos circunferencias, y assi el angulo mhp. es la mitad del arco mp; y tambien de gd. (3. l. 3. n. 1.) luego los arcos mp. gd. son de igual valor, y semejantes (def. 15. l. 3.) lo mismo se dize del angulo phn. y de los arcos pn. dn. &c.

DEMOSTRACION DEL NUM. 3. CON ESTILO ANAlytico.

En los triangulos OnC. y OhC. son lados On. $+$ nC. $\sqcap$ Oh. $+$ hC. (nota, def. 6. l. 3.) y el lado comun OC. $\sqcap$ OC; luego el triangulo OnC. $\sqcap$ OhC. (4. l. 1. n. 1.) luego se ajustaràn (14. p.) luego ny. $\sqcap$ yh. Esto es la mitad de la base nh. igual à la otra mitad. Luego la recta OC. es perpendicular, pues parte à los angulos, O. C. y base nh; en dos partes iguales (5. l. 1. n. 6. 7.) y por consiguiente el arco nq. $\sqcap$ qh; y el ng. $\sqcap$ gh. (def. 10 l. 1.)

DE

PROPOSICION 8.

DE LOS CIRCULOS QUE SE TOCAN.

1. (a) Si se tocan, no tienen un centro comun. (a) 5. y. 6. l. 3.

2. (b) Los que en el comun diametro tienen un punto comun se tocan solo en aquel punto, y al contrario. (b) 13. l. 3.

3. (c) El diametro comun passa por el contacto, que es solo un punto. (c) 11. l. 3

4. (d) La recta, que passa por el contacto, y un centro, passa por todos los centros, y al contrario. (d) 12. l. 3.

5. La que por el contacto corta un circulo, corta en todos arcos, y segmentos semejantes.

DEMOSTRACION fig. 7. l. 3.

1. *Si dos circulos se tocan interior, ó exteriormente, no tienen un mismo centro.* Porque si le tuvieran, fueran equidistantes, y no se tocarian (4. l. 3. n. 1.)

2. *Los circulos AFG. Afg. ó AzX. tienen el punto A. comun, en el comun diametro CBE: digo, que se tocan, y que el contacto es en solo un punto A.* Porque si se toma en la circunferencia ASf. qualquier otro punto S. y de su centro C. se tira la recta CPSR. porque C. no es el centro E. ni B; la recta CR. à la circunferencia convexa RAN. serà mayor, que la minima CA. que passa por el centro E. (1. l. 3. n. 3.) y porque los radios CA. CS. son iguales, (nota def. 6. l. 3.) serà CR. mayor que CS. (9. pr) y el punto R. caerà fuera de la circunferencia ASf.

3. *Assi mismo* CBA. por el centro B. serà mayor que CP. à la circunferencia concova APZ. (1. l. 3. n. 1.) y por ser iguales CA. CS. es CS, mayor, que CP. y el punto P. caerà dentro del circulo ASf. Luego el punto S. no es comun, y assi no es punto del contacto; y porque esto se demuestra de qualquier punto de la circunferencia ASf. que no està en la recta de los centros CBE. tendràn los circulos solo el punto A. comun y se tocaràn, y sucederà el contacto en solo el punto A. de la recta CBAE. y al contrario.

4. *Si la recta CA. passa por el centro C. y por el contacto A. digo, que passa tambien por los centros B. y E.* Porque los centros

C. B E. y el contacto A. se han demostrado en vna recta CBAE. (n. 2.) luego la recta, que passa por C. y A. passa por B. y E. y al contrario &c.

5. *Si la recta FAZf. passa por el contacto A. y corta vn circulo: digo, que en todos corta arcos, y segmentos semejantes.* Porque tirado el comun diametro CBE. passa por el contacto A. ò punto comun à todas las circunferencias (n. 2.) y los angulos verticales gAZ. FAG. son iguales (1. l. 1. n. 5.) y la mitad de los arcos FG. fg. XZ tambien iguales (3. l. 3. n. 1.) y semejantes (def. 15. lib. 3.) y si de los semicirculos de igual valor GFA. gfA. XZA. se quitan iguales valores FG. fg. XZ. quedaràn FNA. fsA. ZPA. de igual valor, y semejantes y tambien FGA. fgA. &c. (15. p.)

DEMOSTRACION DEL NVM. 3. CON ESTILO ANAlytico.

Los circulos ASf. y ATZ. se tocan interiormente en A: digo, que el diametro comun gxA. que passa por los centros C. y B. passa por el contacto A. punto comun. Porque el centro C. no es el centro B. (n. 1.) serà la CA. + q. CP. que no passa por el centro B. (1. l. 3. n. 1.) Pero CS. ∾ CA: por ser iguales radios (nota def. 6. l. 3.) luego serâ tambien CS. + q. CP. (9. p.) luego el punto P. no es comun à entrambas circunferencias: luego no es sino A. el del contacto en el comun diametro gxA.

PROPOSICION 7.

DE LA RECTA TANGENTE DEL CIRCVLO.

(a) 16 l. 3. 1. (a) *La perpendicular al extremo del diametro, toca al circulo en solo aquel punto.*

(b) 16 l. 3 (c) 18. l. 3 2. (b) *qualquiera otra recta por el contacto corta el circulo; y* (c) *la tangente, es perpendicular al radio, y unica en vn punto.*

(d) 19. l. 3 3. (d) *El radio por el contacto, es perpendicular a la tangente, y al contrario.*

4. *Si muchos circulos se tocan en vn punto, tendràn vna el tangente comun.*

La

15. (e) *La recta, que por el contacto corta al circulo, haze con la tangente angulos iguales à los que caben en los segmentos alternos, y al contrario.* (e) 32.l.3

DEMOSTRACION fig. 8. l. 3.

1. *Si la recta AL. es perpendicular al extremo del diametro AEG. digo, que toca al circulo en solo el punto A.* Porque si en ella se toma qualquier otro punto L. y se tira del centro, EL. porque AE. es perpendicular, serâ menor, que EL. (5. l. 1. n. 9.) y pues EA. EN. son radios iguales, es EN. menor, que EL. el todo mayor que su parte: (9. p.) luego qualquier punto L. que no es A. cae fuera del circulo; y assi la recta AL. solo tiene el punto A. comun con el circulo, y es tangente en solo aquel punto.

2. *Si LD. es perpendicular à EA. digo, que qualquiera otra recta AF. por A. corta al circulo.* Porque siendo el angulo LAE. recto; es FAE. agudo (9. p.) luego si se considera EH. perpendicular à AF. serâ el angulo recto H. mayor, que el angulo agudo HAE. y en el triangulo HAE. el lado EA. mayor que EH (5. l. 1. n. 3.) luego tambien el radio EN. igual à EA. es mayor que EH. (13. p.) y pues el punto N. cae en la circunferencia, caera H. dentro del circulo; y assi AH continuada corta al circulo. *Si LA. toca al circulo en A: digo, que es perpendicular al radio EA.* Porque qualquiera recta por A. que no es perpendicular à EA. corta al circulo (n. 2.) luego si LA. le toca, y no le corta, serâ perpendicular. *La tangente en A. es vnica.* Porque es la perpendicular al radio EA. (n. 2.) y al contrario, siendo perpendicular por A. es vnica (5. l. 1. n. 9.)

3. Si LA. es tangente en A; el radio EA. serâ su perpendicular, y la perpendicular à LA. en el punto A. passarâ por el centro E. como consta de los (n. 1. y 2.)

4. *Si muchos circulos se tocan en A. y la recta LD. toca al vn circulo AFG. en A: digo, que toca à todos en A. y es tangente comun.* Porque la recta GEA. por el centro E. y punto A. donde se tocan los circulos, passa por los otros centros B. &c. es diametro

tro comun (16. l. 3.) en A. o si porque la recta LD. toca al circulo AFG. en A. es perpendicular al radio OA. (n. 14) luego tambien es perpendicular al radio BA. que es la misma recta EA. y assi LA. toca tambien al otro circulo en A. (n. 4.) y lo mismo se dize de otros infinitos. Al contrario, si LD. toca à muchos circulos en vn punto A. todos se tocaràn en A. porque serà LD. perpendicular al extremo de todos los diametros en A. (n. 14.) y serà GAB. diametro comun: luego porque todos los circulos tienen vn punto A. comun en el diametro comun, se tocaràn en A. (6. l. 3. n. 2.)

5. *Si la recta LD. toca al circulo en A. y qualquiera otra AF. por A. le corta: digo, que el angulo agudo LAF. es igual al angulo que cabe en el segmento mayor, opuesto FGA.* Tirado el diametro AEG. es el angulo LAG. recto (def. 12. l. 1.) por ser perpendicular (n. 3) y tirada FG. tambien el angulo AFG. en el semicirculo es recto (3. l. 3. n. 6.) luego en el triangulo AFG. los dos angulos AGF. FAG. hazen otro recto (3. l. 1. n. 5.) y porque tambien LAF. FAG. hazen otro recto, que es LAG. (def. 12. l. 1.) seràn LAF. AGF. iguales (15. p.) luego porque todos los angulos del segmento ARGF. son iguales à FGA. (3. l. 3. n. 4.) serà LAF. igual à qualesquiera de ellos. *Digo 2. que el angulo obtuso DAF. es igual à qualquier angulo ANF. del segmento menor opuesto.* Porque ANFG. es vn quadrilatero en el circulo, y los angulos N. y G. opuestos, son tanto como dos rectos (3. l. 3. n. 5.) y tambien LAF. FAD. en vn punto sobre vna recta son iguales à dos rectos (1. l. 1. n. 2.) luego quitados los dos que se demostraron iguales LAF. FGA. quedaràn iguales ANF. FAD. (15. p.) luego la recta AF. haze con la tangente LAD. los angulos iguales à los que caben, ò se pueden formar en los segmentos opuestos, que llamamos alternos.

OTRA DEMOSTRACION DEL NUM. 5. CON ESTILO Antiguo.

Supongase 1. que sea AG. la secante que corta al circulo en A. y que passa por el centro E. sea el angulo DAG. o LAG. (n. 2. y 3.)

pe-

[illegible] el angulo del segmento opuesto AFG. = IR. (prop. 3. n. 6.) luego el angulo [illegible] AFG. ([illegible]

Supongase lo 2. otra secante AF que no passe por el centro B Digo, que en el triangulo AFG. el angulo AFG. = IR. (4. 13. n. 6.) luego los angulos agudos FAG. + FGA. = IR. (n. 5.) pero tambien LAF. + FAG. = IR. (n. [illegible]) luego FAG. + FGA. = LAF. + FAG. (13. p.) luego LAF. + FAG. — FAG. = FGA. + FAG. — FAG. (15. p.) esto es si de cantidades iguales se quitan iguales, ò vna comun à las dos, quedaran iguales. Luego el angulo LAF. = FGA. del segmento opuesto.

LIBRO QVARTO.

EL LIBRO 4. DE EUCLIDES, POR SER TODO PRACTICO, y ser todas sus 15. proposiciones problemas, tienen su lugar en la geometria practica, y son el fundamento de la fabrica del canon trigonometrico.

fin del Lib. 3. y 4.

DEFINICIONES DEL LIB. 5.

de la razon de las quantidades.

1. *Todo.* Es vna quantidad mayor comparada con otra menor.

2. *Parte.* Es vna quantidad menor comparada con otra mayor.

la parte se divide en Aliquota, y en Aliquanta.

3. *Parte Aliquota*, à quien Euclides, absolutamente, llama *parte*, es la que tomada algunas vezes, compone, ò mide perfectamente al todo. Como el 2. es parte Aliquota de 4. porque repetido dos vezes, compone perfectamente al 4.

4. *Parte Aliquanta*, ó *Partes.* Es la que tomada algunas vezes, no adequa jamas al todo. Como 2. es parte Aliquanta de 5. ô 7. &c. porque tomado algunas vezes no les componen, pues del 5. y 7. sobra vno.

5. *Razon en comun*, es el respecto ò relacion de vna quantidad à otra del mismo genero, como si se compara linea con linea, superficie, con superficie, cuerpo con cuerpo.

6. *Razon simple, es la que pide dos terminos simples. El primero, que se compara es antecedente. El segundo á quien se compara: es consequente. Como 4. á 2. el 4. es antecedente, y el 2. consequente; y la compuesta, es la que pide dos terminos compuestos.*

Vna quantidad respecto de otra, ò es igual, mayor, ò menor.

8. *Razon de igualdad*, es quando se compara vna cantidad igual con otra igual. Como 4. con 4.

9. *Razon de mayor desigualdad*, es quando se compara la cantidad mayor à la menor. Como 4. à 2.

10. *Razon de menor desigualdad*, es quando se compara la menor à la mayor. Como 2. à 4.

11. *Cantidad multiplice*, es la cantidad mayor, que algunas vezes justamente contiene à la menor, (def. 9.) porque el 4. contiene algunas vezes justamente al 2.

La razon multiplice toma el nombre de las vezes, que la mayor contiene à la menor; si la contiene dos vezes, es dupla. Como 4. à 2. si tres, tripla. Como 6. à 2. &c.

13. *Razon submultiplice*, es quando la cantidad menor aliquota, està contenida de la mayor algunas vezes justamente: si està contenida dos vezes, se llama subdupla. Como la razon de 2. à 4.

(a) sub tripla. Como 2. à 6.

15 Eucl. l. 5. 14. (a) *Equimultiplices cantidades son aquellas mayores cantidades, que contienen a sus partes menores aliquotas iguales vezes*, con igual razon. *Como el 8. respeto del 4. y el 6. respecto de 3. Porque el 8. contiene dos vezes al 4. como el 6. al 3. se dizen el 8. y el 6. equimultiplices*, y tambien, porque proceden de los terminos simples 4. y 3. multiplicados por vn termino comun à entrambos, que es el 2; y la misma razon ay de 8. à 6. que de 4. à 3. que es la de semejanza; y si es de igualdad, serâ como à 8. à 2. assi 8. à 2.

Qualquiera razon es, racional, ò irracional.

15. *Racional razon*, es la que se puede explicar por numeros; como la razon de 6. à 3. que es razon dupla.

16. *Razon irracional*, es la que no se puede explicar por numeros enteros, ni quebrados; assi es la razon que tiene el lado del quadrado con su diametro, ò diagonal; porque no ay numeros

que

que la puedan explicar; y vn numero irracional, con otro irracional, por ser incomensurables.

NOTA.

De la division hecha en las definiciones 7. 8. 9. &c. de las razones de mayor, y menor desigualdad, nacen diez especies de razon, ó relacion de desigualdad; cinco de la mayor, y otras cinco de la menor.

DE LA MAYOR.

17. *La primera es, quando el antecedente contiene al consequente vna vez, y alguna parte mas*, y se llama generalmente razon, *superparticular*; y si la dicha parte mas, es la mitad $\frac{1}{2}$ se llama *sesquialtera*. Como 6. à 4. si es $\frac{1}{3}$ vn tercio se dize *sesquitercia*. Como 4. à 3. si es $\frac{1}{4}$ vn quarto mas, serà *sesquiquarta*. Como 5. à 4. y assi infinitamente.

18. *La segunda es, si el antecedente contiene vna vez al consequente, y algunas partes mas*, se llama generalmente *superparciente*. Si las partes son dos tercios $\frac{2}{3}$ se dize *superbiparciens tercias*. Como 5. à 3. Si contiene $\frac{3}{4}$ tres quartas mas, se dize *supertriparciens quartas*. Como 7. à 4. *Para conocer estas dos especies, partase el mayor por el menor, si el quociente es 1. y el denominador del quebrado se puede partir igualmente por su numerador, serà la razon de la primera especie, y el segundo quociente le darà el nombre.* Como para conocer la razon de 8. à 6. parto 8. por 6. sale el *quociente* 1. $\frac{2}{6}$ parto 6. por 2. el *quociente* es 3. digo, que es *sesquitercia*. Tambien 56. à 49. es el quociente 1. $\frac{7}{49}$ parto 49. por 7. sale el *quociente* 7. digo, que la razon de 56. à 49. es *sesquiseptima*. Pero si el denominador del quebrado, no se puede partir igualmente por su numerador, serà la razon de la segunda especie, y el mismo quebrado le darà el nombre. Como 10. à 7. sale el *quociente* 1. $\frac{3}{7}$ y porque el 7. no se puede partir por 3. dirè, que

es la razon de la segunda especie, *supertriparciens septimas.*

19. *La tercera especie es*, quando el antecedente contiene al consequente justamente algunas vezes, y se llama *multiplice.* (def. 11.) partase el mayor por el menor, el *quociente* darà el nombre. Si el quociente es 2. se dize dupla. Como 4. à 2. si 3. tripla como 6. à 2. si 10. decupla. Como 20. â 2.&c.

20 *La quarta es*, quando el antecedente contiene al consequente muchas vezes, y alguna parte mas,(componese de la primera, y tercera, y de las dos toma el nombre de *multiplice superparticular.*) Si le contiene 2. vezes, y $\frac{1}{2}$ media, serà *dupla sesquialtera.* Como 5. a 2. Si 4. y $\frac{1}{3}$ vn tercio, serà *quadrupla sesquitercia.* Como 13. à 3.

21 *La quinta es*, quando el antecedente contiene al consequente muchas vezes, y algunas partes mas (componese de la segunda, y tercera, y de las dos toma el nombre de *multiplice superparciente.*) Si le contiene 3. vezes, y $\frac{2}{5}$ dos quintos, *serà tripla superbiparciens quintas.* Como 17. à 5. lo qual se sabrà partiendo como en la (def. 18.)

22. Las otras cinco especies de la menor desigualdad tienen los mismos nombres, poniendo antes la preposicion, *sub.* Como 3. a 2. en la primera especie (def. 17.) es *sesquialtera.* En esta especie 2. a 3. es *subsesquialtera.* Assi tambien, 5. a 3. es *superbiparciens tercias* (def.18.) y 3. a 5. serà *sub superbiparciens tercias.* Assi tambien 4. a 2. es *dupla* (def. 19.) y 2. a 4. *sub dupla* 5. a 2. *es dupla sesquialtera* (def. 20.) y 2. a 5. serà *sub dupla sesquialtera.* 17. a 5. es tripla *superbiparciens quintas* (def. 21.) y 5 a 17. serà *sub tripla superbiparciens quintas.* De donde se concluye, que las especies de razon son 11. vna de igualdad (def. 8.) 5. de mayor desigualdad, y 5. de menos desigualdad.

DE LAS RAZONES SEMEJANTES.

23. *Vna razon de igual, semejante, ò la misma à otra,* (que en esta materia significa lo mismo uno que otro) siempre que el an-

te-

tecedente, de la vna igualmente contiene, ò es contenido de su *consequente*, que el *antecedente* de la otra contiene, ò es contenido de su consequente; ò quando el antecedente tiene el mismo respeto, y orden à su *consequente*, que otro antecedente à su consequente: porque entonces la razon es la misma, igual, &c. Como la razon de 4. à 2. es igual, ò semejante, ò la misma, que la de 6. à 3. porque como 4. es duplo del 2. assi el 6. es duplo del 3. y estas son razones semejantes de mayor desigualdad; tambien la razon de 2. a 4. es igual &c. que la razon de 3. a 6: porque como 2. es mitad de 4. assi 3. es mitad de 6. Y estas razones son de menor desigualdad, y assi de las demas; y los quatro terminos, se llaman proporcionales, no continuos; (a) cuya propiedad es, que el pro (a) 16 ducto de los estremos, es igual al de los medios; y lo mismo, si 17. l. 6 *los terminos son continuos.*

24. *Razones desemejantes*, son quando el antecedente de la vna, no contiene, ò no es contenido de su consequente, como el antecedente de la otra del suyo.

DE LA PROPORCION.

25. *Proporcion*, es la igualdad, ò semejanza de dos razones, llamase en Griego *analogia.*

26. *La proporcion* pide quatro terminos, dos *antecedentes*, y dos *consequentes*, que se llaman proporcianales, porque se compone de dos razones, que cada vna consta de dos terminos; (def. 6.) y pues la razon de 4. a 2. es como la de 6. a 3. hazen las dos razones vna proporcion, y los quatro terminos son proporcionales: como 4. a 2. assi 6. a 3. y se llaman proporcionales no continuos, (def. 23.)

27. *Proporcion racional*, es la que se puede explicar por numeros, como la antecedente proporcion no continua.

28. *Proporcion irracional*, es la que no se puede explicar por numeros, segun se dijo de la razon; (def. 16.) aunque para esta proporcion, segun el P. Taquet, basta, que tantas vezes, quantas vna parte aliquota impropria de vn consequente cabe en su antecedente, las mismas, ò semejantes de otro consequente se incluyan en

su antecedente, por mas, que en entrambos sobrase algo hasta el infinito.

29. *Proporcion continua*, es quando el termino 1. al 2. tiene la misma razon, que el 2. al 3. y que el 3. al 4. y el 4. al 5. &c. de suerte, que siempre se và continuando la misma razon, y se dizen los terminos tres, quatro, ò cinco proporcionales continuos, conforme el numero de los terminos, como los siguientes 1. 2. 4. 8. 16. &c. Porque 1. es mitad de 2. y 2. de 4. y 4 de 8. &c. *Quando los terminos continuos proporcionales no son mas que tres, se dà tambien proporcion, porque en la realidad son quatro, por tomarse el segundo termino dos vezes. Como 1. á 2. assi 2. á 4; con que siendo continuos 1. 2. 4. se toma el 2. dos vezes; la primera como consequente, y la segunda como antecedente.*

30. *Terminos homologos*, son los antecedentes entre si, y los consequentes entre sì, de entrambas razones de la proporcion. Como 8. a 4. assi 6. a 3. el 8. y 6. son homologos, como los son 4. y 3. que en las figuras semejantes, son los lados, que se oponen a iguales angulos.

COMPARACION DE LOS TERMINOS PROPORCIONALES.

(a) 16. 31. (a) *Modos de arguyr*, son los modos de cotejar, ò compa-
lib. 5. rar los terminos proporcionales entre si. Estos son siete, a saber es, *directamente*, *alternando*, *invertiendo*, *componiendo*, *dividiendo*, *convirtiendo*, *y de igualdad*; que se explicaran en los quatro terminos proporcionales siguientes: B. C. D. E. En lugar de estas letras, se pueden poner qualesquiera numeros, lineas, superficies, ò cuerpos, con tal, que compongan dos razones semejantes, aora sean racionales, ò irracionales.

Razon 1.		Razon 2.	
Antecedente 1.	Consequente 1.	Antecedente 2.	Consequente. 2.
1. termino.	2. termino	3. termino	4. termino
Como B. 4.	à C. 2.	assi D. 6.	à E. 3.

32. *Comparacion directa*, es quando se coteja el antecedente 1. a su consequente 1. y el 2. al 2. como B. a C. assi D. a E. ò como 6. a 3.

Alt

33. *Alternando*, es quando se cotejan los antecedentes entre sì, y tambien los consequentes entre sì.

B. D:: C. E.

4. 6:: 2. 3.

34. *Inversa*, es quando se compara el consequente à su antecedente.

C. B:: E. D.

2. 4:: 3. 6.

35. *Componiendo*, es comparar la suma, ò agregado del antecedente, y consequente al mismo consequente. Explicase la suma con este signo + que quiere dezir mas (8. p.) como B + C. à C. assi D + E. à E. Esto es la suma de B. y C. à C. es como la suma de D. y E. à E.

B + C.. C:: D + E.. E.

4 + 2.. 2:: 6 + 3.. 3.

36. *Dividiendo*, es comparar la diferencia del antecedente, y consequente al mismo consequente. Se explica con este signo — que quiere dezir menos (8. p.) como B — C. à C. assi D — E. à E. Esto es la diferencia entre B. y C. tiene la misma razon à C. que la diferencia, entre D. y E. tiene à E.

B — C.. C:: D — E.. E.

4 — 2.. 2:: 6 — 3.. 3.

37 *Convertiendo*, es invertir la composicion, y division, porque componiendo es B + C. à C. assi D + E. à E. (def. 35.) serà convertiendo, como C. à B + C. assi E. à D + E. Asi tambien dividiendo es B — C. à C. assi D — E. à E. (def. 36.) luego convertiendo serà como C. à B — C. asi E. à D — E. que es lo mismo que comparar en lo primero, el consequente à la suma de su antecedente, y mismo consequente; y en lo segundo, es comparar el consequente à la diferencia de su mismo antecedente, y consequente.

C.. B + C:: E.. D + E. | C.. B — C:: E.. D — E.

2.. 4 + 2:: 3.. 6 + 3. | 2.. 4 — 2:: 3.. 6 — 3.

38. *De los terminos proporcionales el 1. y 4. son los extremos, y el 2. y 3. son los medios. En la proporcion continua, los medios siempre son dos menos, que el numero de los terminos; con que si los terminos* con-

continuos son tres, vn medio; si quatro, quitando dos, quedan dos medios: si los terminos son cinco, quitando dos, quedan los medios tres. Y siempre el producto de los medios, es igual al de los estremos. (def. 23.)

(a) 40. *La comparacion por igualdad*, es quando en cada vna de las partes de la proporcion, ay mas de dos terminos; pero tantos en la vna, como en la otra; y si comparando los de dos en dos, tienen vna misma razon; comparando despues el primero, y vltimo de la vna parte, con el primero, y vltimo de la otra, omitiendo los terminos medios de ambas partes, serà la comparacion de igualdad. Exemplo A. B. C:: D. E. F. 8.4.2:: 12.6.3. si como A. à B. es D. à E. y como B. à C. assi E. à F. se infiere por igualdad, que como B. à C. assi D. à F. lo mismo se infiere, si los terminos fueren proporcionales no continuos, como 1..2..3:: 4.. 8..12.

Esta comparacion por igualdad, es en dos maneras, la primera es por igualdad ordenada; la segunda por igualdad desordenada, ó perturbada.

41. *La comparacion por igualdad ordenada*, es quando las cantidades se van comparando por su orden, las dos primeras de la vna parte, con las dos primeras de la otra; las segundas con las segundas, segun se ha visto. (def. 39.)

42 *La comparacion por igualdad desordenada*, es quando se perturba el dicho orden en la comparacion: como si dixessemos, como 8. con 4. assi 6. con 3. y como 4. con 2. assi 12. con 6. se seguirà por igualdad desordenada: como 8. con 2. assi 12. con 3. pero si los terminos fueren proporcionales no continuos, no se puede executar la comparacion de igualdad perturbada.

A..B..C::D..E..F.
8..4..2::12..6..3.
1..2..3::4..8..12.

DE LA RAZON COMPUESTA.

43. *Razon compuesta*, es la que se compone de otras, como vn numero de otro. Si huviere pues muchas cantidades de vna especie, la primera à la vltima, se dize que tiene la razon compuesta de las razones intermedias, sean continuas, ò no continuas las

radicas cantidades. *Exemplo de quatro cantidades, no continuas* 3. 4. 5. 6. 9. la razon de 3. à 9. es compuesta de las quatro razones intermedias de 3. à 4. de 4. à 5. de 5. à 6. y de 6. à 9. Y para que se vea con mayor claridad, hagase la composicion poniendolas primero como quebrados, y multiplicando continuamente los numeradores; y tambien los denominadores, como aqui se ve. $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9}$ serà la multiplicacion, ò composicion de todas ellas, el producto siguiente $\frac{360}{1080}$ que es la misma razon que ay de 3. à 9. ò partes componentes. *Advierto, que los numeradores, que son los terminos, que estàn encima de las rayas, empiezan desde el primero, hasta el penultimo; y los denominadores, que son los que estàn debajo de las rayas, empiezan desde el segundo termino, hasta el vltimo, segun se ve en el referido exemplo.*

44 Si las cantidades fueren continuas $\div$ 16. 8. 4. 2. (def. 29) se haze la composicion como la antecedente; porque la razon de 16. à 2. es la misma que la de su composicion, que es la de los productos, $\frac{512}{64}$ à 64. de los numeradores, y denominadores $\frac{16}{8} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{4}{2}$ y solo se diferencia de la otra, porque esta es razon triplicada, por resultar su composicion de tres razones semejantes, continuas, lo que no es assi en la primera. *No obstante la explicacion, y definicion que hemos visto de la razon* compuesta, *segun la traben los mas de los Mathematicos, digera yo* venia cum tanti Magistri, *ser mas propio se llame* compuesta *la razon que se da entre los dos productos de los Nominadores, y denominadores, ò de los antecedentes, y consequentes de las partes componentes; que no la que se da entre el primero, y vltimo termino de essas mismas partes; por ser essos terminos (en rigor hablando) simples, y no compuestos, segun se verà en las* def. 9. 10. 11. 12. lib. 6.)

DE LA RAZON DVPLICADA, Y TRIPLICADA.

45 *Razon duplicada*, es la que resulta de dos razones semejantes, ò iguales continuas, ò razon compuesta dos veces de razon se-

semejante continua. v.g. Sean proporcionales continuos, B. 2. C. 4. D. 8. porque la razon de B. à C. ò de 2. a 4. es la misma que la de C. à D. ò de 4. à 8. y la de B. a D. ò de 2. a 8. se dize, que es compuesta de las dos iguales, (def. 45.) y compuesta dos vezes de vna misma; y assi duplicada de la razon de B. a C.

B. C. D.
2. 4. 8.

46 *Razon triplicada*, es la compuesta de tres razones continuas semejantes; y la quadruplicada, la que resulta de quatro razones continuas, y assi de las demas. v.g. Sean proporcionales continuos B. 2. C. 4. D. 8. E. 16. F. 32. Hemos dicho en la (def. 45.) que la razon de B. a D. es duplicada, por componerse dos vezes de vna misma razon de B. a C. ò de C. a D. luego la razon de B. a E. serà triplicada, por componerse tres vezes de vna misma razon de B. a C. de C. a D. y de D. a E. luego la de B. a F. se dirà quadruplicada; y assi hasta el infinito.

B. C. D. E. F.
2. 4. 8. 16. 32.

Se advierte, que no es todo vno, razon duplicada, ò triplicada, y razon dupla, ó tripla, porque la razon duplicada resulta de tres terminos continuos proporcionales, y la triplicada de quatro terminos tambien continuos proporcionales, pero la razon dupla es quando vn termino es duplo de otro, segun se puede ver en los exemplos referidos, (def. 45. y 46.) y aunque la razon de 2. á 8. es duplicada, pero la razon de 8. á 4. es dupla, y tambien la de 4. á 2. y assi la razon de 8. a 2. es duplicada, de dos razones duplas de 8. á 4. y de 4. á 2. y de la misma manera se discurrirá, si las razones son triplicadas, como 27. 9. 3. 1. que aunque 27. á 1. es razon triplicada, pero 27. respeto del 9. es razon tripla, y el 9. del 3. y este del 1. (def. 19.) De intento me he dilatado en las definiciones deste Libro, por conocer, que de su inteligencia, no solo depende la del libro siguiente, sino la de todas las Mathematicas.

LIBRO QVINTO.

DE LA RAZON, Y PROPORCION EN COMVN.

TOdas las proposiciones de este Libro, que son en el de Euclides vulgar, 25. se reducen à cinco, que por ser puros axiomas, solo necesitan de explicacion, segun lo advierte Pedro Ramo.

PROPOSICIONES DEL LIB. 5.

Prop. 1. De las razones entre si.
Prop. 2. De las cantidades iguales.
Prop. 3. De las cantidades desiguales.
Prop. 4. De los terminos proporcionales.
Prop. 5. Del todo, y sus partes.

PROPOSICION I.

DE LAS RAZONES ENTRE SI.

(a) 11.l.5.

1. (a) *Las razones iguales à otra son iguales entre si.* (b) 34.l.5.

2. (b) *Las duplicadas, ò triplicadas à otra, ò à otras dos iguales son iguales entre si, (c) y al contrario.* (c) 35.l.5. (d)

3. (d) *Si una razon es duplicada, ò triplicada à otras dos, son estas iguales; y al contrario.* 35.l.5. (e) 27 y 28

4. (e) *Las compuestas de iguales son iguales.* l.5.

EXPLICACION.

1. Sean las razones en qualquiera especie.

B. a C. D. a E. F. a G.
2. a 1. 6. a 3. 8. a 4.

Si B. à C. es como F. à G. y D. à E. es tambien como F. à G. digo, que B. à C. es como D. à E. Porque si F. a G. es dupla, serà B. a C. dupla, y tambien D. a E. dupla: luego la razon de B. a C. y D. a E. son semejantes duplas, ò iguales. Esto, es general en toda especie de cantidad, substituyendo en lugar de las letras, numeros, ò lineas, ò superficies, ò cuerpos; con tal, que en cada razon, sean las cantidades de vna especie.

Sean

2. Sean tres continuos proporcionales B. C. D. y otros tres en la misma razon E. F. G.

B. 9.	C. 3.	D. 1.
E. 18.	F. 6.	G. 2.

La razon de B. a D. es duplicada de la de C. a D. ò de la de B. a C. que todo es vno; (def. 45.) la de E. a G. se supone tambien duplicada de C. â D. que es como E. a G. luego la razon de B. a D. es la misma, que la de E. a G. como se ve en los numeros. Item la razon de B. à D. es duplicada de C. à D. la de E. à G. es duplicada de F. à G. la de C. à D. es como la de F. à G. luego la de B. à D. es como la de E. à G. Al contrario. Si B. à D. es como E. à G. y la razon de B. à D. es duplicada de C. à D. serà tambien la de E. à G. duplicada de C. à D. Item si B. à D. es como E. à G. y B. à D. es razon duplicada de C. à D. y E. à G de F. à G. serà C. à D. como F. à G.

3. La razon de E. à G. es duplicada de E. à F. la misma de E. à G. es tambien duplicada de F. â G. luego E. à F. es como F. à G. lo mismo seria, si en el lugar de E. à G. se huviesse tomado B. à D. porque se compone de iguales B. à C. y C. à D. luego si las compuestas son iguales, tambien lo serân las partes que las componen.

4. La razon de B. à D. es compuesta de B. à C. y de C. à D. (def. 45.) Tambien la de E. à G. es compuesta de E. à F. y de F. à G. siendo B. à C. como E. à F. y C. â D. como F. à G. serà B. à D. como E. à G. luego exæquo, ò iguales (def. 39.) por la igualdad de composicion ordenada, lo mismo se discurrirà por las razones de igualdad desordenada (def. 42.) en fin vna razon se compara à otra, como vna cantidad a otra.

OTRA DEMOSTRACION DEL NUM. 4. CON ESTILO Analytico.

Aunque se suele, regularmente explicar la proporcion de igualdad con seis terminos, tres a vna parte, con proporcion continua; y tres â la otra, con la misma proporcion, segun es de ver en el (num. 4.) y en las definiciones alli citadas; en medio de

esso,

esto, yo la explicarè con 8. terminos, quatro à vna parte, y quatro à la otra, con proporcion discontinua; y para su mayor inteligencia, supongo los terminos siguientes.

caso 1. caso 2.

a . b :: d . e y b . c :: e . f ò sino a . b :: e . f y b . c :: d . e
8 . 4 :: 12 . 6. 4 . 2 :: 6 . 3 8 . 4 :: 6 . 3 4 . 2 :: 12 . 6.

en los quales, dos de los terminos, que estàn en vna parte, se hallan en la otra, y en esta disposicion digo, que dichos terminos constituyen proporcion geometrica de igualdad, ò sea ordenada, ò sea perturbada. ~~Demostracion.~~ Caso 1. en qualquiera especie de cantidad semejante, es el producto de los estremos igual al de los medios: (def. 23. lib. 5.) luego es ae $\backsim$ bd. luego a $\backsim \frac{bd}{e}$ (15. p.) luego, por el mismo proemial, $\frac{a}{d} \backsim \frac{b}{e}$ Item bf $\backsim$ ce: luego b $\backsim \frac{ce}{f}$ luego $\frac{b}{e} \backsim \frac{c}{f}$ (15. p.) luego $\frac{a}{d} \backsim \frac{c}{f}$ (def. 39. y num. 1.) Caso 2. por la (def. 23.) es af $\backsim$ be; y be $\backsim$ cd. luego af $\backsim$ cd. (11. p.) luego $\frac{a}{d} \backsim \frac{c}{f}$ luego en los referidos terminos ay dos proporciones geometricas de igualdad, que era lo que se avia de probar.

PROPOSICION SEGUNDA.

De las cantidades iguales.

1 (a) *Las cantidades iguales tienen vna misma razon con otra, ò con otras iguales.* (a) 7. 1. 5. (b)

2 (b) *Si dos cantidades tienen vna misma razon con otra, ò con otras iguales, son ellas iguales.* 9. 1. 5. (c) 7. y 9. 1.

3 (c) *Vna cantidad tiene la misma razon à dos otras iguales.* 5.

4 *Si vna, ò muchas cantidades iguales tienen la misma razon à otras, son estas iguales.*

5 *Las medias proporcionales, entre los mismos, ò iguales terminos, son iguales.*

EXPLICACION.

1. Sean iguales cantidades B. C. y tambien D. E.

B. 3. C. 3. D. 9. E. 9.

Si B. y C. son iguales, la misma razon tendrà B. à D. que C. à D. y si D. y E. son iguales, serà B. à D. como C. à E.

2. Si B. à D. es como C. à D. seràn B. y C. iguales. Item si B. à D. es como C. à E. siendo D. y E. iguales seràn B. y C. iguales.

3. Si D. E. son iguales, serà B. à D. como B. à E. porque D. y E son como vna misma cosa.

4. Si B. à D. es como B. à E. seràn D. y E. iguales; y si B. C. son iguales, y B. à D. es como C. à E. seràn D. y E. iguales.

5. Sean continuas B. C. D. y E. F. G.

B. 4. C. 2. D. 1.
E. 4. F. 2. G. 1.

Si C. es media entre B. y D. y tambien F. es media entre B. y D. digo, que C. y F. son iguales: porque seràn continuas proporcionales B. C. D. y tambien B. F. D. (def. 44. 45.) y la razon de B. à D. duplicada de B. à C. y tambien duplicada de B. à F. luego porque la razon de B. à D. es duplicada de las dos, son ellas iguales entre si B. à C como B. à F (1. lib. 5. num. 2. 3.) y porque la misma cantidad B. tiene vna misma razon à C. y à F. seràn C. y F. iguales (num. 2.) *Si C. fuere media entre B. y D. y F. entre E. y G. siendo B. E. iguales, y tambien D. G. seran C. y F. iguales.* Porque las iguales B. y E. son como vna misma; y tambien D. y G. serà F. media entre B. y D. (num. 1.) luego C. y F. son igualas como antes (num. 5.)

DEMOSTRACION DEL NUM. 5. CON ESTILO Analytico.

Si vna cantidad, q. 2. tiene la misma razon geometrica à dos cantidades b. 4. d. 4. seràn estas iguales.

Demostracion, *por la suposicion*, es a. b. a. d. luego (def. a lib.

lib. 5.) es $ac \backsim ab$. pero (15. p.) es $c \backsim \frac{ab}{a}$ luego (15. p.) serà $\frac{c}{a} \backsim \frac{b}{a}$ y quitando de vna, y otra parte los consequentes, ò elevando los antecedentes, que es lo mismo (segun la regla de los quebrados) que multiplicar los numeradores, por sus denominadores; quedarà $c \backsim b$. que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION TERCERA.

DE LAS CANTIDADES DESIGVALES.

1. (a) *La cantidad mayor tiene mayor razon à otra tercera, que* (a)
la menor, y al contrario. 8.10.1
2. (b) *Vna cantidad tiene mayor razon à la menor, que à la ma-* 5. (b)
yor, y al contrario. 8.10.1
3. *Si dos tienen vna razon à dos desiguales, son ellas tambien* 5
desiguales, y al contrario. (c) 26.27
4. (c) *El mayor antecedente tiene mayor consequente, si la razon* 28.29
es la misma, y al contrario. 1.5.

EXPLICACION.

1. Sean quatro cantidades B8. C6. D4 E3. *Si B. es mayor que C. la razon de B. à D. serà mayor, que la de C. à D.* Porque B. tendrà mas partes de D. que C. si B. à D. tiene mayor razon, que C. à D. es B. mayor que C. porque contiene mas partes.

2. *Si B. es mayor, que C: y se les compara D. la razon de D. à C. es mayor, que la de D. à B. y si la razon es mayor, es C. menor, que B.* Porque D. siempre tendrà mas partes de C. que de B.

3 *Si B. y C. tienen vna misma razon con D. y E. y D. y E. son desiguales, tambien lo seràn B. y C. y si B. y C. lo son, tambien D. y E.* Porque si B. y C. fuessen iguales, tambien lo fueran D. y E. y al contrario (2. lib. 5. num. 1. 2.)

4. *Si B. à D. es como C. à E. y B. es mayor, que C. tambien D. serà mayor, que E. y si D. es mayor que E. tambien B. es mayor, que C.* Porque si D. no fuera mayor que E. la razon de B. à D.

seria mayor, que la de C. á E. (num. 1.) y al contrario.

DEMOSTRACION DE LOS NUM. 1. Y 2. CON ESTILO Analytico.

De dos cantidades desiguales (a8. y b6.) la mayor (a) á otra tercera (c4) tiene mayor razon, que la menor (b) pero la tercera (c) tiene mayor razon á la menor (b) que á la mayor (a)

Demostracion 1. por la suposicion, es a +— q. b: luego $\frac{a}{c}$ +— q. $\frac{b}{c}$ (17.p.) Item $\frac{a}{c}$ +— q. $\frac{b}{c}$ luego a +— q. b. (17. p.) que es por la contraria. *Demostracion 2.* por la suposicion es a +— q. b; y $\frac{a}{c}$ +— q. $\frac{b}{c}$ (num 1.) luego ac. +— q. bc (def. 12. l. 6.) pero c +— q. $\frac{bc}{a}$ (17.p.) luego $\frac{c}{b}$ +— q. $\frac{c}{a}$ Item, por lo ya probado $\frac{c}{b}$ +— q. $\frac{c}{a}$ luego c +— q. $\frac{bc}{a}$ luego ac +— q. bc. luego a +— q. b. y assi b — q. a. que es por la contraria.

PROPOSICION QUARTA.

DE LOS TERMINOS PROPORCIONALES.

1. (a) *Si quatro terminos son proporcionales directos; lo seràn*
(a) 16 l 5. *tambien invertiendo, componiendo, dividiendo, convertiendo, y al-*
(b) *ternando.*
12.l.5 2. (b) *La suma de los antecedentes, á la suma de los consequentes,*
(c) *es como un antecedente al consequente.*
17.18 l.5. 3. (c) *Si los terminos compuestos son proporcionales; tambien lo seràn divididos, y al contrario.*

4. *Si muchos terminos son continuos proporcionales, sus diferencias guardan la misma proporcion, y al contrario.*

EXPLICACION.

1. Sean los quatro terminos B. 6. C. 3. D. 4. E. 2. No me detengo en explicar el primer numero, por averle explicado difusamente desde la definicion 31. hasta la 42. solo advierto aqui, que

que aunque todas las comparaciones se pueden hazer, siendo las razones de diferente especie de cantidad; como si B. y C. fuessen lineas; y D. y E. superficies, ò cuerpos; però la comparacion alterna, pide que los quatro terminos sean de vna especie; porque si B.C. son lineas, y D. E. superficies, no tiene lugar la alternacion.

2. Como B + D. suma de los antecedentes à C + E. suma de los consequentes: assi B. à C. ò D. à E.

3. Si B + C. à C. es como D + E. à F: Luego divididos B. à C. serà como D. à E. y al contrario, si B. a C. es como D. à E. compuestos seràn B + C. à C. como D + E. à E. (def 35. 36. lib. 5.)

4. *Sean continuos B. C. D. E. y las diferencias F. G. H. digo, que estas tienen la misma razon.*

B. 27. C. 18. D. 12. E. 8.

F. 9. G. 6. H. 4.

Porque son proporcionales B. à C. como D. à E. directe: lo seràn tambien dividiendo B − C. à C: como C − D. à D. (num. 3.) y pues B − C. es lo mismo que F. y C − D. lo mismo que G, seràn F. à C. como G. à D. luego alternando F. a G. como C. à D. (num. 1.) assi mismo serà G. à H. como D. a E. &c. luego F. G. H. son diferencias, que tienen la misma razon continua. Al contrario. Si F. à G. es como C. à D. luego alternando F. à C. como G. à D. y componiendo como F + C. à C. assi G. + D. à D. esto es B. à C. y C. à D. luego B. C. D. son continuos proporcionales. Cuyo producto de estremos, es igual al producto del medio (def. 23. lib. 5.)

OTRA DEMOSTRACION DEL NUM. 2. CON ESTILO Analytico.

Hypotesis. Sean los quatro terminos de la proporcion los siguientes: am 6.. a 4: bp 9.. b 6. y el exponente, excesso, o diferencia de la primera razon sea m 2. y de la segunda p 3. siendo pues los referidos quatro terminos proporcionales: serà (8. p.) $\frac{am}{a} = \frac{bp}{b}$ luego

(d. f.

(def. 23.) el producto de los estremos, &c. $am \frown bp$; y alternando (def. 33.) $\frac{am}{bp} \frown \frac{a}{b}$ luego componiendo (def. 35.) como $am + bp..a + b::am..a$ y $bp..b$. (def. 36.) que es lo que se avia de probar. *De otra manera, sea $a + b$. la suma de dos cantidades a8. y b4. y su semisuma $\frac{a+b}{2}$ Item sea la diferencia de dichas cantidades $a - b$. y su semidiferencia $\frac{a-b}{2}$. Digo, que tiene la misma razon la suma á su semisuma, que la diferencia á la semidiferencia.* Demostracion. La propiedad de los terminos proporcionales es, que el producto de los estremos es igual al de los medios (def. 23.) luego serán proporcionales los siguientes: como $a + b . \frac{a+b}{2} :: a - b.. \frac{a-b}{2}$. porque elevando los consequentes por el 2. (segun se insinuò en la demostracion analytica de la prop. 2.) es el producto de los estremos, y de los medios $aa - bb$. luego &c. *Item*, llamese la suma S. y la semisuma Ss. la diferencia llamese D. y la semidiferencia Sd. y la $\times$ expresse la multiplicacion (8. p.) será $\frac{S}{Ss} \frown \frac{D}{Sd}$ luego $S. \times .Sd \frown Ss. \times D$. luego $S \frown \frac{Ss \times D}{Sd}$. Luego $Sd \frown \frac{Ss \times D}{S}$. Luego $Ss \frown \frac{S \times Sd}{D}$ luego $D \frown \frac{S \times Sd}{Ss}$. y assi de otras infinitas combinaciones.

PROPOSICION QUINTA.

DEL TODO, Y SUS PARTES.

1. (a) *Como un todo á otro, assi la parte á la parte semejante del otro.*

(a) 19. l. 5.

2 *Como la parte de un todo a la parte semejante del otro, assi un todo a otro.*

3 *Si una parte a otra semejante fuere como el todo al todo, será tambien el residuo al residuo, como el todo al todo, ó como la parte á su parte semejante.*

4. *Si el residuo al residuo, es como la parte á la parte semejante, el todo al todo tendrá la misma razon, y al contrario.*

EX-

EXPLICACION.

1. Sea el vn todo, ò compuesto B + C. y el otro D + E.

B + C. D + E.

3. 4. 2. 1.

Como B + C. a D + E. assi es B. a D. como todo el Cielo a todo el globo terraqueo, assi la mitad, ò tercio del Cielo, a la mitad, ò tercio del globo, &c. (def. 25.)

2. Como B. a D. assi B + C. a D + E. como la mitad, ò tercio del Cielo à la mitad, ò tercio del globo, assi todo el Cielo à todo el globo, ò mundo.

3. Si B. à D. es como B + C. à D + E. seràn B. y D. partes semejantes: Luego quedaràn C. y E. partes tambien semejantes, y serà C. à E. como B + C. à D + E. ò como B. a D. Esto es, si parte del Cielo es à parte del Mundo, como el Cielo al Mundo, ò globo, el residuo del Cielo al residuo del globo, serà como el Cielo al globo.

4. Si C. à E. es como B. à D. tambien B + C. à D + E. serà como B. à D. *Todo lo dicho se funda, en que las partes semejantes tienen entre si la misma razon, que los todos &c. y el producto de los estremos es igual al de los medios* (def. 23.) *fin del Lib. 5.*

DEMOSTRACION DE LOS NUM. 1. Y 2. CON ESTILO *Analytico.*

Supongo, que vn todo sea (a. 9.) *y otro todo* (b. 6.) *y el tercio de cada todo se llame* (e) luego seràn proporcionales a..b:: $\frac{a}{e}$ .. $\frac{b}{e}$ porque el producto de los estremos, y el de los medios es $\frac{ab}{e}$ (def. 23.) luego &c. Por la misma razon $\frac{}{e}$ .. $\frac{}{e}$ :: a..b: Luego como la parte a la parte assi el todo al todo, pero a — $\frac{a}{e}$ .. b — $\frac{b}{e}$ :: a..b: porque los productos de los estremos y medios sō ab — $\frac{ab}{e}$ luego a — $\frac{a}{e}$. b — $\frac{b}{e}$ :: $\frac{a}{e}$ .. $\frac{b}{e}$ como la parte a la parte assi el residuo al residuo.

DEFINICIONES DEL LIBRO. 6.

DE LA DIVISION, Y COMPOSICION PROPORCIONAL (fig. 3. lib. 1. casos 1. 2.)

1. *Las cantidades se dividen, y componen proporcionalmente*, entre sì, quando las partes de la vna se hazen proporcionales à las de la otra, como son las rectas RH. DB. que estàn divididas proporcionalmente entre sì; porque RM. à MH. es como DC à CB y los rectangulos OH. GB. estàn divididos proporcionalmente si RN. à NH. es como DE. à EB. Lo mismo es en qualquiera otra cantidad.

2. *Vna cantidad està dividida proporcionalmente*, ò segun media, y estrema razon; quando la parte menor à la mayor tiene la misma razon, que la mayor à toda la cantidad. Como si BC. à CD. es como CD. à BD. estarà BD. dividida proporcionalmente, ò segun media, y estrema razon.

3. Lo mismo es del paralelogramo BG. si BE. à ED. es como ED. à BG. Llamase media, y estrema razon, porque de tres proporcionales continuos, se hallan allì el medio, y los estremos pues la parte mayor DC. ò ED. es media proporcional entre la menor CB. ò BE. y toda la DB. ò paralelogramo BG.

DE LAS FIGVRAS SEMEJANTES.

4. *Figuras semejantes*, son las que se componen de iguales angulos comprehendidos, con el mismo orden de lados proporcionales con proporcion de igualdad, como el rectangulo, ò producto plano OH. si es equiangulo à GB; y OS. à SH. es como GF. à FB: serà OH. semejante à GB. Lo mismo es de los triangulos RSH. y DFB. mitad de los paralelogramos, y assi de otras figuras.

5. *Lados homologos* son los proporcionales, que se oponen à iguales angulos. Esto es, que al homologo, que es antecedente en vna figura, le corresponda en la 2. figura por antecedente el otro homologo semejante opuesto al angulo de la 1.

DB

DE LAS FIGVRAS RECIPROCAS.

6 *Figuras reciprocas* ſon las que tienen los lados reciprocos. Eſto es, que de quatro proporcionales, los dos eſtremos, ò primero, y vltimo, eſtân en vna figura; y los dos medios, ò ſegundo, y tercero, en otra. Como ſi en los triangulos RHS. y FBC. ſon proporcionales RH. à FB. Como BC. à HS. ſeràn los lados reciprocos, y las figuras reciprocas. Lo miſmo es de los rectangulos OH. EB. que ſon duplos de los triangulos.

7. *La altura de qualquier figura es la perpendicular tirada del vertice de la figura à ſu baſe.* Eſta perpendicular a vezes cae dentro, à vezes fuera de la figura; y las que tienen vn miſmo vertice, y las vaſes en vna miſma recta, tienen vna miſma altura, ò comun perpendiculo.

8 *Puntos, y lineas ſemejantes*, reſpecto de dos figuras ſemejantes, ſe llaman quando diſtan proporcionalmente de todas las partes ſemejantes de las figuras.

9 *Razon compueſta*, es vna razon geometrica, cuyos terminos ſon productos equiangulos, el vno de los antecedentes, y el otro de los conſequentes de otras razones geometricas, que ſe llaman componentes.

10 *Razon compueſta no ſemejante*, es vna razon geometrica, cuyos terminos, ſon productos equiangulos deſemejantes, el vno de los antecedentes, y el otro de los conſequentes de algunas razones geometricas diſsimiles, v.g. $\frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{4}{6}$ cuyos productos $\frac{12}{60}$ ſon diſsimiles de las partes componentes diſsimiles (def. 43. l. 5.) *Quales ſean razones deſemejantes* (def. 24. l. 5.)

Corolario. *Productos deſsimiles*, ſon los productos equiangulos, el vno de los antecedentes, y el otro de los conſequentes de algunas razones geometricas diſsimiles.

11. *Razon compueſta ſemejante*, es vna razon geometrica, cuyos terminos ſon productos equiangulos ſemejantes, el vno de los antecedentes, y el otro de los conſequentes de algunas razones geometricas iguales, ò ſemejantes v.g. $\frac{a2}{d4}$ $\frac{b3}{e6}$ ò ſino $\frac{a2}{d4}$ $\frac{b3}{e6}$ $\frac{c5}{f10}$

cuyos productos $\frac{ab.}{de.}$ y $\frac{abc.}{def.}$ son semejantes de las partes compo-
nentes semejantes, (otro exemplo, vease en la def. 44. l. 5.) *y porque estos productos son proporcionales con los terminos productos de los lados homologos de vnas mismas figuras semejantes* (*def.* 25. *l.* 5.) *siendo la razon compuesta de estos, duplicada de los mismos componentes, seralo tambien la otra duplicada* (1. *l.* 5. *n.* 4.)

Corolario. *Productos semejantes*, son los productos equiangu-
los, el vno de los antecedentes, y el otro de los consequentes de
algunas razones geometricas iguales, ò semejantes.

12. *Razon compuesta de vna simple*, es quando los terminos de
la simple se multiplican por vna misma cantidad, como si los ter-
minos de la simple fuessen a. y b ò 2. y 3. y se multiplicassen por
vna misma cantidad c. ò 4. la razon de $\frac{ac.}{cb.}$ es la compuesta de la
simple a. y b. y serâ la razon de $\frac{ac.}{bc.}$ ∽ $\frac{a.}{b.}$ (d. 14. l. 5. y 1. l. 5. n. 4.)

LIBRO SEXTO.

DE LA RAZON, Y PROPORCION EN PARTICULAR.

TOdas las proposiciones de el libro 5. se contrahen à
este, que por la nobleza, y fecundidad de sus propo-
siciones, se llama libro de *Oro*, porque apenas se ha-
lla en toda la Mathematica problema, ò theorema
illustre, que no tenga dependencia deste libro 5. y assi
deve el estudioso aplicar su principal cuydado en la perfecta in-
teligencia, y comprehension de sus theoremas, pues sin ellos ni-
mas se podran registrar los arcanos mas reconditos de la Ma-
thematica. Las proposiciones de Euclides son 33. de las quales
son 8. problemas, que se reservan para la practica, y 25. theoremas
que se reducen à las seis siguientes.

PRO-

PROPOSICIONES.

PROPOSICION I.

DE LOS TRIANGVLOS, Y PARALELOGRAMOS dissimiles.

1. (a) *Si tienen igual altura, tienen la razon, que las bases, y si igual base, la razon de las alturas, y al contrario.* [a) 1. l. 6. (b) 23. 16.]

2. (b) *Todos tienen la razon compuesta de las bases, y alturas.* [(c) 14. l. 6]

3. (c) *Los que tienen las bases, y alturas reciprocas, son iguales, y al contrario.* [(d) 23. l. 6]

4. (d) *Si tienen igual angulo, tienen la razon compuesta de los lados, y al contrario.* [(e) 14. y 15. l. 6]

5. (e) *Si tienen los lados del angulo igual reciprocos, son iguales, y al contrario.* [(f) 16. 17. l. 6.]

6. (f) *Si tres, ò quatro rectas son proporcionales, el triangulo, ó paralelogramo, que con angulo igual se forma de la media, o medias, es igual al de las estremas.*

DEMOSTRACION (fig. 1. l. 6.)

1. *Los triangulos b. d. tienen una misma altura: digo que tienen la razon, que las bases, y que b. à d. es como BN. à ND.* Porque si tienen igual altura, pueden estar entre dos paralelas BD. FH (8. l. 1. n. 1.) y si las bases son iguales, son los triangulos iguales; (8. l. 1. n 3.) si BN. es dupla de ND. serà b. duplo de d. si tripla, triplo, &c. (8. l. 1. n. 5.) luego tantas vezes contiene b. à d. como la base BN. contiene à la base ND. y assi tiene b. à d. la razon que la base BN. à ND. (def. 23. l. 5.)

Si b. y d. tienen igual base NE. tienen la razon que las alturas, BN.

BN. ND. Porque seràn iguales con altura igual; y si BN. es dupla de ND. serà b. duplo de d. &c. (8. l. 1. n. 5.) Lo mismo es de los paralelogramos, por ser duplos de los triangulos. *Al contrario, si b. y d. tienen la razon que las bases BN. ND: tendràn igual altura.* Porque si se considera el triangulo X. con igual altura que b. y con igual base que d. el triangulo b. à X. tendrà la razon que BN. à ND. (n. 1.) luego porque b. tiene la misma razon à X. que à d. son X. y d. iguales (2. l. 5. n. 3.) y porque tienen igual base, tendràn igual altura (8. l. 1. n. 4.) luego b. y d. tienen igual altura. (13. p.) Si b. y d. tienen la razon que las alturas, tendràn igual base: y se demuestra de la misma manera, tomando la base como altura; y al contrario &c. *Este theorema, que hemos acabado de explicar, es lo mismo, que la proposicion 8. del libro primero, y solo se repite en este, por la continuacion, que ay de razones en los triangulos, y paralelogramos dissimiles.*

2. Sean dos triangulos b. y g. sus bases BN. ND. y sus alturas NE. NC. y sea X. à Z. como BN. à ND. y Z. à Y. como NE. à NC. con que X. à Y. tiene la razon compuesta de X. à Z. y de Z. à Y. (def. 43. l. 5.) que es las de las bases, y alturas: digo pues, que el triangulo b. à g. tiene la razon que X. à Y. Sobre la base ND. formese el triangulo d. con la altura de b. y serà b. à d. como la base BN. à ND. (n. 1.) Esto es como X. à Z. y porque d. y g. tienen vna base ND: serà d. à g. como la altura NE. à NC. ò como Z. à X. (n. 1.) luego *exequo*, las razones compuestas de iguales son iguales, b. à g. como X. à Y. (4. l. 5. n. 4.) que es la razon compuesta de X. à Z. y de Z. à Y. (def. 43. l. 5.) ò la razon compuesta de las vases BN. à ND. y de las alturas NE. à NC. *Lo mismo se demuestra de los paralelogramos, por ser duplos de los triangulos.*

3. Sean dos triangulos b. y g. sus bases BN. ND. y sus alturas NE. NC. si las bases, y alturas son reciprocas. Esto es, si son proporcionales, y las dos estremas, estàn en vna figura, y las dos medias en otra, como BN. à ND. assi NC. à NE. digo, que son los triangulos, ò paralelogramos iguales. Sobre la base ND. formese el triangulo d. con la altura de b. y serà d. à b. como la base ND. à NB. (n. 1.)

(n. 1.) y porque d. y g. tienen vna base DN. serà d. à g. como la altura NE. à NC. (n. 1.) Luego porque la razon de ND. à NB. se supone la misma, que NE. à NC. tendrà el triangulo d. la misma razon à b. que à g. luego b. y g. son iguales (2. l. 5. n. 4.) Al contrario, si b. y g. son iguales, seràn las bases, y alturas reciprocas, y las dos medias NB. NE. en el triangulo b. y las estremas ND. NC. en el triangulo g. luego b. y g. tienen las bases, y alturas reciprocas (def. 6. l. 6.)

4 *Si los triangulos b. y g. tienen iguales angulos BNE. DNC. y se toma X. à Z. como BN. à ND. y Z. à Y. como EN. à NC. digo, que el triangulo b. à g. tiene la razon, que X. à Y. que es compuesta de X. à Z. y de Z. à Y. Esto es de las de los lados BN. à ND. y EN. à NC.* Juntense los angulos en N. que sean vna recta BN. ND. y seràn los angulos BNE. END. iguales à dos rectos (1. l. 1. n. 1.) y por ser iguales BNE. DNC. seràn DNC. END. iguales tambien à 2. rectos, y CN. NE. vna recta (1. l. 1. n. 1.) y si se tira la DE. los triangulos b. d. tendràn igual altura en vn punto E. Luego b. à d. es como la base BN. à ND. ò como X. à Z. (n. 1.) y porque d. y g. tienen igual altura en vn punto D. serà d. à g. como la base EN. à NC. ò como Z. à Y. (n. 1.) luego b. à g. es como X. à Y. (1. l. 5. n. 4.) y (def. 39. l. 5.) que es la razon compuesta de X. à Z. y de Z. à Y. ò compuesta de los lados BN. à ND. y EN. à NC.

5 *Si los triangulos b. y g. tienen vn angulo igual BNE. à DNC. y los lados reciprocos BN. à ND. como NC. à NE. digo, que son iguales.* Juntense los angulos como antes, y serà d. à b como DN. à NB. (n. 1.) y d. à g. como EN. à NC. (n. 1.) luego si suponemos, que DN. à NB. es como EN. à NC. tendrà d. à b. la misma razon que à g. y porque d. tiene vna misma razon à los dos, seràn b. y g. iguales (2. l. 5. n. 3.) Al contrario. Si b. y g. son iguales, con vn angulo igual, dispuestos como antes: serà b. à d. como g. à d. (2. l. 5. n. 1.) y porque b. à d. con igual altura es como la base BN. à ND. y g. à d. como la base NC. à NE. (n. 1.) luego BN. à ND. es como NC. à NE. (1. l. 5. n. 4.) y assi son los lados reciprocos, por estar las estremas en b. y las medias en g. (def. 6.)

(def. 6.) lo mismo se demuestra de los paralelogramos. (f)

6. *Si quatro rectas son proporcionales, DN. à NB. como EN. à NC. el triangulo b. formado de las medias EN. NB. con qualquier angulo BNE. serà igual al triangulo g. formado de las estremas DN. NC. con igual angulo DNC.* Porque seràn los lados reciprocos (def. 6.) luego seràn los triangulos b. y g. iguales (n. 5.) Al contrario. Si los triangulos b. y g. son iguales, y tienen vn angulo igual BNE. à DNC. seràn los lados reciprocos, &c. y las 4. proporcionales (def. 6.) *Si fueren tres continuas proporcionales DN. NB. NC.* tomando à NE. igual à la media NB. seràn 4. DN. à NB. Como NE. à NC. luego b. y g. tendràn los lados reciprocos como antes, y seràn iguales, y al contrario. Lo mismo se demuestra de los paralelogramos por ser duplos de los triangulos.

SCHOLIO.

Como qualesquier triangulos, ò paralelogramos, si tienen la misma, ò iguales bases; y la misma, ò iguales alturas, son iguales; (8. l. 1. n. 3.) y si son iguales, y tienen la misma, ò iguales bases, tienen la misma altura; (8. l. 1. n. 4.) qualquier paralelogramo, ò triangulo no rectangulo es igual al paralelogramo, ò triangulo rectangulo formado de la misma base, y altura, que èl. (8. l. 1. n. 3.) Por esso para averiguar sus areas, y la razon que tienen à otras magnitudes, se toma el vno por el otro; porque los no rectangulos se reducen facilmente à rectangulos iguales à ellos (prob. 6. n. 4.) y los productos de sus lados, son tambien iguales à ellos; (prob. 7. n. 1.) y seràn dichos productos inciertos, sino los fueren de los lados de los rectangulos (def. 3. 8. l. 1.)

DEMOSTRACION ANALYTICA DEL NVM. 5.

Demostracion. Sean dados los dos paralelogramos (b. y g.) y el lado ò altura EN. de 4. pies del paralelogramo (b) llamese (E) y el otro lado, ò base BN. de 6. pies del mismo paralelogramo (b) llamese (B) y el lado CN. ò altura de 8. pies del paralelogramo (g) llamese (C) y el lado, ò base ND. de 3. pies del mismo paralelogramo

... gramos tienen la razon
(g) llamese (D.) Digo, que dichos paralelogramos tienen la razon
compuesta de las bases, y alturas B. á D. y E. á C. Porque el pa-
ralelogramo b ∽ BE. y el paralelogramo g ∽ CD. (prob. 7.
n. 1.) luego la razon de $\frac{b}{g}$ ∽ $\frac{BE}{CD.}$ (2. l. 5. n. 1.) pero la razon de
$\frac{BE.}{CD.} = \frac{B.}{D.} \times \frac{E.}{C.}$ (def. 9. y 10.) luego la misma serà la de los para-
lelogramos sus iguales. Esto es $\frac{b}{g.} = \frac{B.}{D.} \times \frac{E.}{C.}$ (1. l. 5. n. 4.) que
es la compuesta de sus bases, y alturas.

De otro modo. *Sean tres paralelogramos g. d. y b. cuyos lados consten de las mismas partes, que antes; y sean las tres rectas, X. de 8. pies: Z. de 4. pies, é Y. de 12. que siempre se supondrán proporcionales con los lados de dichos paralelogramos.* Demostracion. Es
el paralelogramo g ∽ CD. y el paralelogramo d ∽ DE. y
el paralelogramo b ∽ BE. (prob. 7. n. 1) Luego la razon de
$\frac{g.}{d.}$ $\frac{d.}{b.}$ ∽ $\frac{CD.}{DE.}$ $\frac{DE.}{BE.}$ (2. l. 5. n. 1.) pero la razon del producto
CD.. DE:: C.. E. (def. 14. l. 5. y 12. l. 6.) Esto es, los compues-
tos, por tener vna misma base D. tienen la razon de las alturas, ò
componentes C. à E. ò X. à Z. y de la misma manera la razon del
producto DE.. BE:: D.. B. (def. 14. l. 5. y 12. l. 6.) Esto es, por
tener vna misma altura E. tienen la razon de sus bases, ò com-
ponentes D. à B. ò Z. à Y. luego los productos equiangulos CD.
DE. BE. estàn en proporcion de igualdad ordenada; con las rec-
tas X. Z. Y. (def. 39. l. 5.) Esto es, como CD. à DE. assi X. à Z,
y como DE. à BE. assi Z. à Y. luego como CD. a BE. assi X. à
Y. que es la razon compuesta de las bases, y alturas; pero los di-
chos paralelogramos, segun se ha probado, son iguales à los di-
chos productos: luego estarân en la misma proporcion de igual-
dad ordenada (1. l. 5. n. 4.) y serà como g. à d. assi X. à Z y co-
mo d. à b assi Z. à Y: Luego g.. b:: X.. Y. (def. 39. y 41. l. 5.)
luego los paralelogramos g. y b. tienen la razon compuesta de
las bases, y alturas, que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 2.

DE LOS TRIANGULOS SEMEJANTES.

(a) 4. l. 6. 1. (a) *Los triangulos equiangulos son semejantes.*

(b) 2. l. 6. 2. (b) *La recta paralela á la vase haze triangulos, y segmentos semejantes, y al contrario.*

(c) 5. l. 6. 3 (c) *Si los tres lados de vn triangulo son proporcionales á los tres de otro, son los triangulos semejantes, y al contrario.*

(d) 6. l. 6. 4. (d) *Si dos lados de vn triangulo son proporcionales á los de otro con igual angulo, son los triangulos semejantes.*

5 *Los triangulos que tienen vn angulo igual, y los lados del otro proporcionales, y el tercer angulo de vna especie, son semejantes.*

6. *Si los triangulos semejantes tienen las vases en vna recta, ó paralelas, tendrán los lados paralelos, y al contrario.*

DEMOSTRACION (fig. 2. l. 6.)

1. *Los triangulos BNC. DNE. son equiangulos: digo que tienen los lados proporcionales CN. á NB. como NE. á ND. y por consiguiente son semejantes (def. 4.)* Ponganse verticales los dos angulos iguales END. BNC; y otros dos iguales NED. NCB. sean alternos: serán ED. BC. paralelas (2. l. 1. n. 2.) y tiradas EB. CD. los triangulos BCD. BCE sobre vna base BC. y entre dos paralelas BC. ED. serán iguales. (8. l. 1. n. 3.) y quitando el comun BNC. quedarân iguales triangulos BNE. CND. que tienen los verticales iguales BNE. CND. (1. l. 1. n. 5.) luego los lados que ciñen dichos angulos son reciprocos BN, à NC. Como ND. à NE, (1. l. 6. n. 3.) Luego son proporcionales los lados, que comprehenden los angulos iguales BNC. DNE. pues BN. à NC. es como DN. à NE. Si los angulos iguales NED. NCB. se ponen verticales, se demostrarà de la misma suerte, que NE. a ED. es como NC. à CB: luego todos los lados, que corresponden a iguales angulos son proporcionales, y asi son los triangulos semejantes, (def. 1. 4.)

En

2. *En el triangulo* FNG. *es la recta* ED. *ó* BC *paralela a la vase: digo, que haze triangulos, y segmentos semejantes.* Porque por las paralelas, son iguales los angulos NFG. NBC. NDE. y tambien NGF. NCB. NED. (2. l. 1. n. 2.) y los verticales BNC. END. (1. l. 1. n. 5) Luego los triangulos FNG. BNC. END son equiangulos: luego son semejantes *num.* 1. y son proporcionales los lados FN. a NG. como BN. a NC. y como DN a NE. *num.* 1. y por ser toda FN. a toda NG. como la parte BN. a la parte BC. tambien el residuo BF. a CG. serà como FN. a NG. ò BN. a NC. (5. l. 5. n. 1. 2. 3. &c.)

Al contrario. Si vna recta BC. *corta los lados proporcionales* BN. *á* NC. *como* FN. *á* NG. *será* BC. *paralela á* FG. Porque si se considera por B. vna paralela à FG cortarà los lados proporcionales, y passarà por C. *num.* 2. luego serà la misma BC.

3 *Si dos triangulos* FNG. GMO. *tienen los tres lados proporcionales, serán semejantes.* Tomese FB. igual a GM. y sea BH. paralela à NG. y serà FB. â FH. como FN. à FG. *num.* 2. y pues tambien se supone GM. a GO. como FN. a FG es FB. à FH. como GM. a GO. (1. l. 5. n. 1.) y alternando como FB. igual a GM. asi FH. igual a GO; y tambien como FB. igual a GM. asi BH. igual a MO. (4. l. 5. n. 1.) luego porque los triangulos FBH. GMO, tienen todos los lados iguales, son en todo iguales, y equiangulos, (4. l. 1. n. 1.) y porque FBH. es equiangulo a FNG. (n. 2.) tambien lo serà GMO. (2. l. 5. n. 3.) y asi GMO. es semejante a FNG. *num.* 1.

4. *Si dos triangulos* MGO. NFG; *tienen los angulos* F. *y* G. *iguales, y los lados que los ciñen proporcionales* NF. *á* FG. *como* MG *á* GO. *serán semejantes.* Porque si se toma FB igual à GM; y BH. paralela à NG. se demostraràn los triangulos FBH GMO. en todo iguales (4. l. 1. n. 3.) y GMO. semejante à FNG. como en èl, *num.* 2. por ser MO. paralela a la base BH. y NG.

5 *Si dos triangulos* FNG. GMO. *tienen los angulos* F. *y* G. *iguales, y los lados de los angulos* N. *y* M. *proporcionales, y los otros angulos* NGF. MOG. *de vna especie, seran semejantes.* Porque si FB. es igual à GM; y BH. paralela à NG. ò NC. serà FB. à BH.

como FN. à NG. *num.* 1. que se supone como GM. à MO. *num.* 1. Luego alternando como FB. igual à GM. assi BH. igual à MO. (4. l. 5. n. 1.) y porque FBH. GMO. tienen iguales dos lados FB. BH. GM. MO. y vn angulo opuesto F. igual à G. y los otros H. y O. de vna especie, son en todo iguales, y equiangulos (4. l. 1. n. 4.) Luego porque FBH. es semejante a FNG. *num.* 2. tambien GMO. serà semejante a FNG. (2. l. 5. n. 3.)

6 *Si los triangulos FNG. GMO. son semejantes, y tienen las bases en vna recta FO. los lados semejantes seràn paralelos.* Porque OF. entra en GM. FN. con iguales angulos G. F. y en OM. GN. con iguales FGN. O. (def. 4.) seràn FN. GM. paralelas y tambien GN. OM. (def. 25. coro 1. l. 1.) *Si las bases BC. GO. ó ED. GO. son paralelas, se demuestra lo mismo.* Porque continuada la vase OGF. hasta que corte los lados continuados DNF. BNG. por ser ED. BC. FO. paralelas, se demostraràn iguales los angulos EDN. NBC. NFG. MGO. ó D. B. F. G. y tambien DEN. NCB. NGF. y O. (2. l. 1. n. 2.) y (def. 25. coro 1. l. 1.) Luego son FD. GM. y GE. OM. paralelas. *Esto se entiende, quando todos los angulos iguales se corresponden; como en los triangulos BNC. ó FNG. GMO. ó todos estàn inversos, como en END. OMG.* Al contrario. Si las bases, y lados son paralelos, seràn todos los angulos iguales, por el paralelismo; (def. 25. coro. 1. l. 1.)

DEMOSTRACION DEL NUMERO AN. ESTILO ANA-lytico.

Prevencion. Tirada la recta ED. como antes, paralela à la base BC. Digo, que los triangulos bnc. y end. seràn semejantes, y los lados que comprehenden el angulo n. *proporcionales.* Porque es el triangulo cbd ∽ cbe. (8. l. 1. n. 3.) luego el triangulo cbd. — bcn ∽ cbe — bcn. (15. p.) Esto es, el triangulo residuo end ∽ bne; pero el angulo end ∽ bne: (1. l. 1. n. 5.) Luego de los triangulos iguales, son reciprocos los lados que comprehenden dichos angulos iguales, (1. l. 6. n. 5.) y por consiguiente proporcionales. Esto es, el lado en.. nb::en..nd. (def. 6. l. 6.) pero

tam-

y tambien el
tambien el angulo end ∽ bnc. (1. l. 1. n. 5.)
angulo bcn ∽ den ; y el angulo cbn ∽ edn : (2. l. 1. n. 2.)
Luego el triangulo end ∽ bnc. (n. 1.) y los lados de dichos
triangulos proporcionales en.. nb:: en.. nd. (n. 4.) que era lo
que se avia de probar.

PROPOSICION 3.

DE LAS RECTAS ANGULARES.

1. (a) La recta que parte igualmente al angulo, parte la base con la razon de los lados, y al contrario. (a) 3. l. 6.

2 La recta, que con vn lado haze angulo igual al opuesto, forma vn triangulo semejante al todo, y el lado es medio entre la base, y segmento contermino, y al contrario.

3 (b) La perpendicular del angulo recto haze dos triangulos semejantes al todo, y es media entre los segmentos, y cada lado es medio entre la base, y el segmento contermino, y al contrario. (b) 8. l. 6.

4 Los perpendiculos de dos angulos hazen con el otro angulo dos triangulos semejantes, y los segmentos proporcionales à los lados opuestos.

5 Si dos rectas de los angulos parten proporcionalmente los lados, se parten ellas proporcionalmente, y al contrario.

DEMOSTRACION. (fig. 3. lib. 6. caso 1. 2. 3.)

parte igualmente el
1 *En el triangulo GNF.* caso 1. *la recta NH. parte igualmente el* Sea HB.
angulo GNF. digo, que GH. à HF. es como GN. à NF. iguales;
paralela à GN. y seran los angulos alternos GNH. NHB. seràn
(2. l. 1. n. 2.) y pues se suponen iguales GNH. HNB. igua-
iguales BHN. HNB. (n. 1. p.) y los lados opuestos tambien como
les NB. BH. (5. l. 1. n. 1.) luego porque GH. à HF. es como HB.
NB. ò HB. à BF. (2. l. 6. n. 2.) y tambien GN. à NF. (n. 1. 5.
à BF. (2. l. 6. n. 2.) serà GH. à HF. como GN. à NF. parterà
n. 1.) *Al contrario. Si GH. à HF. es como GN. à NF.* parte ba-
NH. al angulo GNF. igualmente Porque la que assi le ze,

ze, que GH. à HF. ſea como GN. à NF. (n. 1.) Luego ſi NH. haze eſto, y divide la parte igualmente al angulo.

2 *Si en el triangulo cdb. (caſo 2.) la recta dr. haze el angulo cdr. igual al opueſto b: digo 1. que el triangulo cdr. es ſemejante al todo cdb: digo 2. que dc. es media entre bc. y cr.* Porque el angulo c. es comun, y ſe ſuponen iguales rdc. cbd. ſeràn tambien iguales drc. cdb. (3. l. 1. n. 7.) Luego los triangulos cdr. cdb. ſon equiangulos, y ſemejantes (2. l. 6. n. 1.) y ſon proporcionales cr. à cd. como cd. à cb. El lado menor de cdr. al mayor; como el menor de cdb. al mayor (2. l. 6. n. 4.) conque cd. es media, &c. *Al contrario. Si los triangulos cdr. cdb. ſon ſemejantes, digo, que el angulo cdr. ſerá igual al opueſto b.* Porque ſi cdr. y cdb. ſon equiangulos, ſiendo el angulo c. comun, ſerá el angulo cdr. igual à b. ò al angulo cdb. y pues el angulo cdr. no es igual à cdb. por ſer dr. db. diferentes rectas; y el todo d. mayor que ſu parte cdr. (9. p.) Luego ſera igual à b. Tambien. Si el lado cd. es medio entre cr. cb. porque el angulo c. es comun, y ſus lados proporcionales cr. à cd. como cd. à cb. ſon los triangulos cdr. cdb. ſemejantes (2. l. 6. n. 4.) y el angulo cdr. igual à b. *num. 2.*

3 *Si el angulo d. es recto (caſo 2.) y dr. es perpendicular, digo 1. que los 3. triangulos cdr. rdb. bdc. ſon ſemejantes: digo 2. que dr. es media entre cr. rb: digo 3. que cd. es media entre cr. cb; digo 4. que db. es media entre br. y bc.* I. Porque en los triangulos cdr. cdb. el angulo c. es comun; y los angulos cdb. drc. rectos iguales, ſeran cdr. cbd. iguales (3. l. 1. n. 7.) y en los triangulos drb. cdb. es b. comun, y drb. cdb. rectos iguales: luego ſon rdb. dcb. iguales (3. l. 1. n. 7.) y los tres triangulos ſemejantes. II. Luego cr. à rd. es como dr. à rb. y dr. media entre cr. rb. (2. l. 6. n. 3.) III. Tambien rc. à cd. es como dc. à cb. y dc. media entre cr. y cb. *num 2.* IV. rb. à bd. es como db. à bc. y bd. media entre rb. y bc. *num. 2.* *Al contrario.* Si el angulo cdb. es recto, y dr. haze los triangulos cdr. rdb. ſemejantes al triangulo cdb. ſe à dr. perpendicular, porque los angulos en r. ſeran rectos. *Si dr. es perpendicular, y haze los triangulos crd. drb. ſemejantes, es dr. media entre cr. rb. num. 3.*

En

4 *En el triangulo END. (caso 3.) son dos perpendiculos DX. EZ. digo, que los triangulos DNX. ENZ. son semejantes; y ZN. á NX. como* EN. *á* ND. Porque en los triangulos NEZ. NDX. el angulo N. es comun, y los rectos X. Z iguales; quedan ZEN. XDN. iguales (3. l. 1. n. 7.) Luego ZN. à NE. como XN. à ND. (2. l. 6. n. 3.) y alternando ZN. a NX. como NE. a ND. (4. l. 5. n. 1.)

5 *Si en el triangulo cdb. (caso 2.) las rectas ca. dr. cortan los lados con proporcion db. á ba. como cb. á br. digo, que dn. á nr. es como cn. á na.* Porque los triangulos brd. bac. tienen el angulo b. comun, y sus lados reciprocos bd. à bc. como ba. à br. luego son iguales (1. l. 6. n. 5.) y quitado el espacio comun banr. quedarán dna. cnr. triangulos iguales (15. p.) y por ser iguales tambien los angulos verticales (1. l. 1. n. 5.) dna. cnr. tendràn los lados reciprocos dn. à nr. como cn. à na. (1. l. 6. n. 5.) *Al contrario.* Si dn. à nr. es como cn. à na. serà el triangulo dna. igual à cnr. (1. l. 6. n. 5.) y añadiendo el comun banr. serà brd. igual à bca; y por ser el angulo b. comun, tendran los lados reciprocos (1. l. 6. n. 5.) luego bd. à ba. es como bc. à br. &c.

OTRA DEMOSTRACION DEL NUM. 1. CON ESTIlo analytico, fig. 3. caso 1.

Suponiendo como antes la recta HB. paralela à GN. y que la linea HN. parta igualmente al angulo GNF. serà el angulo GNH. ∽ HNB. pero el angulo BHN ∽ GNH. por ser alternos (2. l. 1. n. 2.) Luego el angulo HNB ∽ BHN. (11. p.) y el lado NB ∽ BH. por estar opuestos à iguales angulos (5. l. 1. n. 2.) pero tambien el angulo B ∽ N. y el angulo H ∽ G. (def. 25. cons. 1. l. 1.) y el angulo F. comun: Luego el triangulo GNF. ∽ HBP. (2. l. 6. n. 1.) y los lados proporcionales GF.. PN:: HF.. FB; (def. 4. l. 6.) y como HF.. FB:: GH.. BN. Esto es como el todo al todo, y la parte à la parte, assi el residuo al residuo (5. l. 5. n. 1. 2. 3. &c.) Luego invertiendo, serà como GH.. NB:: HF.. FB. y alternando, serà como GH.. HF:: NB.. BF. (4. l. 5. n. 1.)

pe-

pero NB ∼ BH. segun se ha probado arriba: (5. l. 1. n. 8.) Luego GH..HF::BH.. BF. pero BH..BF:: GN..NF: (2. l. 6. n. 2) Luego GH.. HF:: GN.. NF. (1. l. 5. n. 1.) que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 4.

DE LAS FIGURAS SEMEJANTES.

1. (a) *Las semejantes a otra son semejantes entre si: (b) todas se*
(a) 21. l. 6. *resuelven en triangulos semejantes, y las diagonales tienen la ra-*
(b) 20. l. 6. *zon, que los lados.*

2 (c) *Tienen la razon duplicada de los lados homologos, y se-*
(c) 19. y 20. l. 6. *mejantes.*

3 (d) *Descritas sobre rectas proporcionales son proporcionales, y*
(d) 22. l. 6. *al contrario.*

4 (e) *La que se forma de la recta opuesta al angulo recto del*
(e) 31. l. 6. *triangulo rectangulo, es igual a las dos de los otros dos lados.*

5 (f) *Las que estan dentro de otra con angulo comun, tienen comu-*
(f) 26. l. 6. *nes diagonales, y los lados paralelos, y al contrario.*
(g) 24. l. 6.

6. (g) *La diagonal comun haze segmentos, y complementos pro-*
(h) 43. l. 6. *porcionales.*

7 (h) *En los paralelogramos, y figuras, que por la diagonal se parten igualmente, son los complementos iguales, y al contrario.*

DEMOSTRACION (fig. 4.). (casos 1. 2. 3.)

1 *Las figuras semejantes a otra, son semejantes entre si.* Porque tienen todos los angulos iguales, y los lados proporcionales a los de la otra: (def. 4.) luego tambien entre si, (1. l. 5. n. 1.) y assi son semejantes, (def. 4.) *Si EBM. CBR. son semejantes (caso 1.) digo, que se resuelven en triangulos semejantes.* Porque tiradas EF. CD. opuestas a los angulos iguales EBF. CBD. (1. l. 1. n. 5.) comprehendidos de lados proporcionales EB. à BF. como CB. à BD. (def. 4.) seran los triangulos b. q. semejantes, (2. l. 6. n. 4.) y EF. à DC. Como EB. à BC. De la misma suerte se

se demostrara el triangulo Z. semejante à X. y FN. à DS. como FM. à DR. y porque los tres lados de h. son proporcionales a los de g. son tambien semejantes: Luego se resuelven las figuras en triangulos semejantes. *Las diagonales semejantes son proporcionales a los lados.* Porque se ha demostrado EF. à DC. como BE. à BC. *Al contrario.* Si las figuras se resuelven en triangulos semejantes b. h. z. y q. g. x. con el mismo orden, seran todos los angulos iguales, y los lados proporcionales: luego las figuras seran semejantes (def. 4.)

2 *Si EBM. CBR. son semejantes: digo que EBM. à CBR. tiene la razon duplicada de EB. à BC. ò BF. à BD. que son los lados homologos, y semejantes (def. 5.)* Juntense las figuras, que dos angulos iguales EBF. CBD. sean verticales, y tirada FC. sean 3. continuas EB. BC. y CH. con que la razon de EB. a CH. sera duplicada de EB. à BC. ò de FB. â BD. que es la misma (def. 45. l. 5.) El triangulo b. à d. con igual altura en F. (def. 7.) es como la base EB. à BC; (1. l. 6. n. 1.) y el triangulo d. à q. con igual altura en C. es como la vase FB. à BD. (1. l. 6. n. 1.) Esto es como EB. â BC. ò como BC. à CH: Luego porque b. à d. es como EB. à BC. y d. â q. como BC. à CH. quitados los intermedios, sera b. à q. como EB. à CH. que es la razon duplicada de los lados homologos EB. â BC. por ser continuos proporcionales EB. BC. CH. (def. 45. l. 5.) Lo mismo se demostrarà de los triangulos h. y g. y de Z. y X. Luego la suma de los triangulos b. h. z. que es la figura BM. à la suma de los triangulos q. g. x. que es la figura RB. tiene la misma razon de EB. â CH. duplicada de los lados homologos EB. à BC. ò de FB. à BD. &c.

3 *Si fueren 4. proporcionales EB. à BC. como* NM. *à RS; y sobre EB. BC. estuvieren dos figuras semejantes b. q; y sobre* NM. *RS. otras dos semejantes EM. CR. digo, que son proporcionales b. à q. como EM. à CR.* Porque b. à q. tiene la razon duplicada de EB. à BC. y el trapecio EM. à CR. tiene la duplicada de NM. à RS. (n. 2.) sera la razon duplicada de EB. à BC. la misma duplicada de NM. à RS. (1. l. 5. n. 1.) Luego la misma razon tiene

b.

b. à q. que tiene EM. à CR. y alternando, como b. à EM. assi q. à CR. &c. (4. l. 5. n. 1.)

Al contrario, Si b. à q. es como EM. à CR: tendrà b. à q. su semejante la razon duplicada de EB. à BC: y EM. à CR. su semejante, la duplicada de N M. à RS: *num.* 2. Luego si las duplicadas son iguales, tambien las sencillas. (1. lib. 5. n. 2.) y son proporcionales EB. à BC. como NM. à RS.

4 *Si el triangulo FBC. es rectangulo; y sobre los dos lados FB. BC. se describen dos figuras semejantes BM. BR. y otra semejante sobre la base FC: digo, que la figura sobre FC. serà igual à las otras dos de BF. BC.* Porque las figuras semejantes de qualesquiera rectas, son como los quadrados; esto es, tienen la misma razon duplicada de los lados homologos, *num.* 2. y pues el quadrado de FC. es igual à los quadrados de BF. BC. (4. l. 2. n. 1.) luego qualquiera otra figura de FC. serà igual a sus semejantes sobre BF. BC (2. l. 5. n. 1.)

Al contrario. Si la figura de FC. es igual à sus semejantes, de BF. BC: tambien el quadrado de FC. sera igual à los dos de BF. BC: *num.* 2. Luego el angulo FBC. serà recto. (4. l. 2. n. 4.)

5 *Si las figuras semejantes* nh. mo. (*caso* 2.) *tienen el angulo* z. *comun, digo, que tienen comunes diagonales* zd. zb. zl; *y los lados paralelos.* Porque las figuras semejantes desde el angulo igual, ò comun, se dividen en triangulos semejantes, *num.* 1. son los angulos mzh. nzd. iguales: (por ser vno mismo) luego zhzd. son vna misma linea, (def. 9. l. 1.) y tambien zib: luego las diagonales zhd. zib. son comunes, y en los triangulos semejantes son los angulos zmb. znd. iguales: (2. l. 6. n. 1.) luego mb. nd. son paralelas, (2. l. 6. n. 6.) y tambien hi. db. y bl. io. ro. ql. (def. 25. l. 1.)

Al contrario. Si las diagonales zd. zb. &c. son comunes, y los lados paralelos, todos los triangulos seran semejantes: (2. l. 6. n. 1.) luego tambien las figuras, *num.* 1. porque se resuelven en triangulos semejantes.

6 *Si las figuras semejantes* dq. hr. ef. *tienen la diagonal comun* zb: *digo*, I. *que los segmentos* zndb. zmbi. *son semejantes.* Porque constan de triangulos semejantes, zmb. znd. y zhc. zcb. *num.* 5.

lue-

luego son los segmentos semejantes; y lo mismo es de zib. zoi; y de bnz. zui &c. *num.* 1.

Digo lo segundo, que si los angulos zb. son comunes; y tambien el punto i. el complemento de vna parte ni. al complemento il. tiene la razon que el segmento nb. *à* zl. Porque siendo los segmentos de vna parte semejantes, y tambien los de la otra, *num* 5. serà nb. à zl. como mi. à zo. y como bu. à io: (5. l. 5. n. 1. 2. &c.) Luego porque todo el segmento nb. es à todo zl. como las partes mi. ub. à las partes zo. el el residuo, ò complemento ni. al residuo il. tendrà la misma razon, que el segmento nb. à zl. (5. l. 5. n. 1. 2. &c.) luego los complementos son como los segmentos.

7 *En el paralelogramo* dq. (*caso* 3.) *son iguales los complementos* di. iq. Porque la diagonal zb. haze los segmentos iguales zdb. zbq. (7. l. 1. n. 2.) luego los complementos di. qi. son iguales como los segmentos. *num.* 6. porque si de cantidades, ò triangulos iguales zbd. zbq. se quitan triangulos iguales zhi. zri. quedaran iguales los trapecios hdbi. ibqr; (15. p.) si de estos se quitan los triangulos, tambien iguales icb. bfi. (7. l. 1. n. 2.) quedaran iguales los paralelogramos residuos qi. id (15 p.) Lo mismo se demuestra de las figuras regulares de lados pares: Como Hexagono, Octagono, &c. y tambien de qualesquiera otras, que por la diagonal se parten igualmente.

DEMOSTRACION DE EL NVMER. 2. CON ESTILO *Analytico.*

Para mayor inteligencia de este theorema, hemos de imaginar, que las figuras semejantes BME. y BRC. sean triangulos, ò paralelogramos rectangulos, (scholio. 1. l. 6.) y que BME se llame *b.* y BRC. se llame *q.* y el lado BE. de la figura *b.* se llame *e.* y sea de 12. pies; y el otro lado BF. de la misma figura, se llame *f.* y sea de 4. pies; y el lado BC. de la figura *q.* se llame *c.* y sea de 6. pies; y el otro lado BD. de la misma figura, se llame *d.* y sea de 2. pies. Esto supuesto probarè, que las figuras semejantes tienen la razon duplicada de los lados homologos, y semejantes. *Demostracion.* Siendo las figuras semejantes, sus lados, ò terminos ſon proporcionales, (def. 4 l. 6.) Luego como e..f::c..d: (def. 26. l. 5.) luego alternando, como $\frac{e.}{c.} = \frac{f.}{d.}$ (def. 33. l. 5.) pero la razon de e. à c. y la de f. à d. es la de los lados homologos (por ſupoſicion.) Luego el producto ef. ⌒ cd. (def. 11. l. 6.) luego la razon de ef. à cd. es compueſta; (def. 9. l. 6.) pero la razon compueſta de productos ſemejantes, es duplicada, ò triplicada de las partes ſemejantes componentes: (def. 11. l. 6.) Luego la razon compueſta de los productos ſemejantes $\frac{ef.}{cd.} = \frac{e.}{c.} \times \frac{f.}{d.}$ que es la duplicada de los lados homologos. Eſto es, ſi à dos de los lados homologos e. y c. v.g. de las figuras b. y q. ſe añadieſſe otra recta h. de tres pies, lado de otra figura ſemejante r. ſerian tres rectas continuas proporcionales ∺ e. c. h. Luego la razon de e. à h. ſera duplicada; (def. 45. l. 5.) pero la razon de $\frac{ef.}{cd.}$ ⌒ $\frac{e.}{h.}$ por ſer proporcionales ef..cd::e..h: (def. 23. l. 5.) Luego ſiendo la razon de e. à h. duplicada de los lados homologos, lo ſerà tambien la razon de ef. à cd. (1. l. 5. n. 2.) Luego la miſma razon tendràn las figuras ſemejantes planas ſus iguales, que es lo que ſe avia de probar.

PROPOSICION 5.

DEL CIRCULO, Y SUS PARTES.

(a) 33 l. 6 1 (a) *Los angulos, y ſectores de circulos iguales tienen la razon que los arcos, y al contrario.*

2 *En circulos deſiguales, las cuerdas, arcos, y circunferencias ſemejantes, ſon como los radios, y al contrario.*

3 *En los miſmos, las cuerdas, arcos, y ſegmentos iguales, ſon deſemejantes, y de mayor valor en el menor circulo.*

(b) 1. l. 12. 4 (b) *Las figuras ſemejantes inſcritas, ò circunſcritas tienen la razon duplicada de los radios.*

(c) 2. l. 12 5 (c) *Tambien los ſectores, y ſegmentos ſemejantes, y los circulos entre ſi, en quienes degeneran los poligonos.*

DE-

DEMOSTRACION fig. 5. l. 6.

En vn circulo, los angulos, y sectores son como los arcos. Porque si el arco CG. es igual à GD. el angulo CBG. serà igual à GBD. (def. 10. l. 1.) y se ajustaràn los arcos, y radios, y tambien los sectores, y assi son iguales (14. p.) si el arco CG. es duplo de GP. serà el angulo, y sector CBG. duplo de CBP; como CBM; triplo: y CBD. quadruplo &c. Luego siempre los angulos, y sectores de vn mismo, ò iguales circulos tienen la razon, que sus arcos; porque los de circulos iguales se ajustan, y hazen vno (14. p.) Al contrario, los angulos son como los sectores; y los sectores como los angulos.

2 *En circulos desiguales, si los arcos EF. DC. son semejantes: digo, que las cuerdas, y los arcos EF. DC; y las circunferencias, tienen la razon, que los radios.* Por ser los arcos semejantes EF. DC. son iguales los angulos EBF. DBC. (def. 10. l. 1.) y los lados proporcionales (def. 4) como EB. igual à BF. assi DB. igual à BC. Luego son los triangulos semejantes; y la vase, ò cuerda EF. à DC. es como el radio BE. à BD. (2. l. 6. n. 1. 2.) *Lo mismo es de los arcos.* Porque si se parten igualmente con la recta BHG. serà EH. igual à HF. como DG. à GC. y assi infinitamente se corresponden iguales cuerdas, y arcos iguales en cada circulo. Luego los arcos semejantes tienen la razon de las cuerdas, que es la de los radios. Lo mismo es de vna circunferencia entera à otra: porque como la parte à la parte semejante, assi el todo al todo (5. l. 5. n. 2.)

3. *En circulos desiguales, las cuerdas, arcos, y segmentos iguales son desemejantes.* Porque si estos fueran semejantes, tendrian la razon de los radios *n. 2.* con que serian desiguales como los radios, que es contra lo supuesto: Luego son desemejantes. *Si la cuerda es igual, corta arco de mas valor en el circulo menor.* Porque si tuviessen igual valor, serian los arcos semejantes (def. 10. l. 1.) y (def. 15. l. 3.) y fuera menor la cuerda, como el radio en el circulo menor *n. 2.* y mucho mas si el arco tuviera menos valor (2. l. 3. n. 5.) luego si en el menor circulo, el arco no es

de igual, ni de menor valor, será de mayor valor.

4 *Las figuras semejantes inscriptas, y circunscriptas, tienen la razon duplicada de los radios.* Porque si DBC. EBF. son partes semejantes de dos Hexagonos inscriptos, &c. los lados DC. EF. que son cuerdas de arcos semejantes, seran como los radios BD. BE. *num.* 2. luego porque el Hexagono BDC, &c. á EBF. &c. tiene la razon duplicada de DC. á EF. (4.1.6.n.2.) tendrá tambien la razon duplicada de los radios BD. á BE. (1.15.n.2.) lo mismo se demuestra de las circunscriptas.

5 *Los sectores, y segmentos semejantes, y los circulos entre si, tienen la razon duplicada, de los diametros, ó radios.* Porque en los sectores BEF. BDC. el triangulo BEF. á BDC. tiene la razon duplicada de BE. á BD. *num.* 4. dividiendo los arcos en H. y G. el triangulo EHF. á DGC. tiene la razon duplicada de las cuerdas EF. á DC. (4.1.6.n.2.) que es duplicada de los radios BE. á BC. *num.* 4. y continuando siempre la bisección, tendrán siempre los triangulos la razon duplicada de los radios: Luego la suma de todos los triangulos, que componen a vn sector, segmento, ó circulo, a la suma de otro su semejante, tendrá la misma razon duplicada de los radios: (4.1.5.n.2.) luego porque continuada infinitamente la bisección, la suma de todos los triangulos componen al sector, segmento, ó circulo, tendrá vn sector, segmento, ó circulo, a otro su semejante la misma razon duplicada de los radios (5.1.5.n.1.)

Consectario. Todo lo que se ha dicho en la proposicion 4. de las figuras semejantes, conviene a los sectores, segmentos semejantes, y a los circulos entre si.

DEMOSTRACION DE EL NUM. 1. CON ESTILO Analytico.

Prevencion. En vn mismo circulo, ó en iguales, seran iguales las cuerdas de iguales arcos.

Demostracion. Siendo en el circulo DBG. la cuerda DM ⊥ MG. (prevencion) será el arco DM ⊥ MG. (2.13.n.1.) Luego go el angulo DBM ∽ MBG. (def. 10. l. 1.) La misma razon milita en los otros arcos iguales del otro circulo igual GPC: luego DMG. es igualmente multiplice de DM. como el angulo DBG. del angulo DBM. Esto es, como DMG..DM :: DBG..DBM. (def. 14. l. 5.) Luego de la misma manera será igualmente multiplice el arco GPC. del arco PC. como el angulo GBC. del angulo PBC. Pero el arco DMG. es al arco GPC. como el angulo DBG. al angulo GBC. y al contrario: (def. 10. l. 1.) Luego el arco DM. tiene al arco PC. La misma razon que el angulo DBM. al angulo PBC. como el todo al todo &c. (5. l. 5. n. 1.) y si vn arco fuere mayor de otro, será el angulo de quien fuere medida, tambien mayor, v. g. si es el arco MC + q. DM. Será el angulo MBC + q. DBM. si duplo duplo, si triplo triplo, &c. (def. 10. l. 1.) La misma razon milita en los angulos en la circunferencia: porque si el angulo en la circunferencia es CPG ∽ DMG. seran iguales los arcos en que insisten (3. l. 3. n. 4.) luego los angulos tienen la razon que los arcos.

PROPOSICION 6.

De las rectas en el circulo.

1 (a) Si dos cuerdas se cortan, los segmentos son reciprocos, y sus rectangulos iguales. (a) 35. l. 3.

2. La perpendicular de la circunferencia al diametro, es media entre los segmentos del diametro.

3. Qualquiera cuerda, es media entre el diametro, que passa por vn estremo, y el segmento, que haze la perpendicular del otro estremo.

4 (b) La tangente es media entre la secante, y su exterior segmento, y al contrario: y las tangentes de vn punto son iguales, y solamente son dos. (b) 36. l. 3.

5. (c) Los rectangulos de cada secante con su exterior segmento, son iguales al quadrado de la tangente, y entre si. (c) 37. l. 3.

6 Las secantes son reciprocas con sus exteriores segmentos, y con las cuerdas hazen triangulos semejantes.

DE.

DEMOSTRACION. (fig. 6. l. 6.)

1 *Las cuerdas CF. DE. se cortan en H. digo que los segmentos son reciprocos HD. á HC. como HF. á HE. y el rectangulo DHE. igual á CHF. Esto es el rectangulo, que se puede formar de la recta DHE. es igual al que se puede formar de CHF.* (*def.* 3. *l.* 2.) Porque tiradas CD. DF. los angulos DCE. DEF. son iguales, y la mitad de DZF: y tambien son iguales CDE. CFE. y la mitad del arco CE. (3. l. 3. n. 4.) y los verticales CHD. EHF. tambien son iguales (1. l. 1. n. 5.) luego los triangulos DHC. EHF. son equiangulos, y son proporcionales DH. á HC. como FH. á HE. (2. l. 6. n. 1.) y el rectangulo DHE. de las estremas, es igual á CHF. de las medias (1. l. 6. n. 6.)

2 *Si del punto C. en la circunferencia es perpendicular CO. á qualquier diametro DE: digo, que CO. es media entre los segmentos DO. OE.* Porque tiradas CD. CE. será el angulo DCE. recto en el semicirculo, (3. l. 3. n. 6.) y el triangulo DCE. rectangulo: Luego la perpendicular CO. es media entre los segmentos de la base DO. OE. (3. l. 6. n. 3.)

3. *Sea qualquiera cuerda CE: y ED. diametro, y CO. su perpendicular: digo, que CE. es media entre DE. y EO.* Porque el triangulo DCE. es rectangulo, *n.* 2. y el lado CE. medio entre la base DE. y segmento EO. la demostracion es la misma que la (3. l. 6. n. 3.)

4 *Si del punto B. la recta BC. toca al circulo en C. y otra BE. le corta: digo, que BC. es media entre la secante EB. y su exterior segmento BD.* Porque tiradas CE. CD. los angulos CED. BCD. son iguales, y la mitad del arco DC; (3. l. 3. n. 4) y tambien porque el angulo del segmento CED. es igual al de la tangente BC. y secante CD: (7. l. 3. n. 5.) Luego porque en el triangulo BCE. la recta CD. haze el angulo BCD. igual al opuesto CEB. es CB. media entre la vase EB. y el segmento BD. (3. l. 6. n. 2.) *Al contrario.* Si BC. es media entre EB. BD. será el angulo BCD. igual al opuesto CEB: (3. l. 6. n. 2.) Luego porque BC. haze con la

se-

secante CD. el angulo BCD. igual al del segmento opuesto CED; sera BC. tangente. (7. l. 3. n. 5.)

Si de el punto B. son dos tangentes BC. BZ. digo que son iguales. Porque cada vna es media entre EB. BD. *num.* 4. y lo mismo que se ha probado de CB se puede probar de BZ; porq las medias entre iguales terminos, son iguales. (2. l. 5. n. 3.) *Desde B. no puede aver otra tangente*, porque solas dos iguales, se pueden tirar à la circunferencia convexa; (1. l. 3. n. 4.) y assi las tangentes de vn punto son dos solas, y a partes opuestas.

5 *El rectangulo EBD. y tambien FBG. son iguales al quadrado de la tangente BC.* Porque BC. es media entre EB. y BD; y entre FB. y BG. *num.* 4. Luego el quadrado BC. es igual al rectangulo EBD; y tambien al de FBG. (1 l. 6. n. 6.)

Los rectangulos EBD. FBG. de cada secante, y su exterior segmento, son iguales entre si. Porque cada vno es igual al quadrado de la tangente BC. *num.* 5. luego tambien entre si. (11. p.)

6 *Las secantes BE. BF. son reciprocas con sus exteriores segmentos BG. BD.* Porque el rectangulo EBD. es igual â FBG. *num.* 5. luego los lados son reciprocos BE. à BF. como BG. à BD. (1. l. 6. n. 5.)

Los triangulos BDG. BFE. son semejantes. Porque siendo el angulo DBG. comun, son los lados proporcionales BD. à BG. como BF. à BE. *num.* 6. luego son los triangulos semejantes. (2. l. 6. n. 4.) Tambien porque los angulos BDG. GDE. en vn punto, son tanto como dos rectos (1. l. 1. n. 1.) y en el quadrilatero del circulo DGFE son GDE. EFG. opuestos tanto como dos rectos; (3. l. 3. n. 5.) Luego EFG. GDB. son iguales; (15. p.) y assi mismo BEF. BGD. y DBG. comun: Luego los triangulos son equiangulos, y semejantes. (2. l. 6. n. 1.)

DEMOSTRACION DE EL NUMERO 1. CON ESTILO ANALYTICO.

Este theorema tiene quatro casos. I. Cortandose las dos cuerdas en el centro. II. Passando solo vna por el centro, cortando la la otra que no passa por el centro, en partes iguales. III. Passando vna por el centro, cortando la otra en partes desiguales, que es la de nuestra figura. IV. No passando alguna de ellas por el centro.

Demostracion. En los triangulos DCH. y HEF. es el angulo DHC ⎍ FHE. (1.l.1.n.5.) pero el angulo DCF ⎍ DEF. (3 l.3.n.4) luego son los triangulos equiangulos: (3.l.1.n.7.) luego (2.l.6.n.1) el triangulo DCH ⎍ HEF: Luego son proporcionales DH . HC :: HF . . HE. (def. 4.) luego el rectangulo de las estremas DHE ⎍ CHF. de las medias, que son los lados reciprocos. (1.l. 6. n. 6.)

Fin de el Libro 6.

LIBRO XI. Y XII. DEFINICIONES.

DEFINICIONES DE LOS SOLIDOS.

DE LOS SOLIDOS EN COMVN.

1 S*olido*, ò cuerpo es vna quantidad, que consta de tres dimenciones, longitud, latitud, y profundidad. Y porque la Geometria se ocupa en ellas, se suele dividir en *longimetria, Planometria, y Sterometria.*

2. *Terminos de los solidos, son las superficies.*

3. *Linea perpendicular à vn plano*, es la que corta al plano en vn punto, y es perpendicular à todas las rectas del plano, que passan por aquel punto, con quienes hace angulos rectos.

4 *Comun seccion de los planos*, es la linea comun, ò la que se halla en dos planos que le cortan.

5. *Vn plano es perpendicular à otro*, quando todas las rectas que estàn en èl perpendiculares à la comun seccion, son tambien perpendiculares al otro plano.

6. *Plano inclinado á otro*, es el que no es perpendicular, la inclinacion se mide por el angulo agudo que hazen dos perpendiculares à la comun seccion, y salen de vn punto comun, cada vno por su plano.

7. *Inclinacion semejante*, es la que tiene igual angulo, ò medida.

8. *Planos paralelos*, son los que siempre distan igualmente, aunque infinitamente se continuen.

9. *Solidos semejantes*, son los que se terminan de superficies semejantes, tantas en vno, como en otro, y con el mismo orden.

10. *Angulo solido rectilineo*, es el que consta de muchos angulos rectilineos, que estàn en diferentes planos, y solo tienen vn punto comun. Estos seràn semejantes, ò iguales, quando los angulos planos, de que se componen son iguales, y dispuestos con el mismo orden. *Angulos paralelos son quando los lados del vno son paralelos á los del otro; y estos tambien son semejantes.*

DE LOS SOLIDOS EN PARTICULAR.

11 *Prisma es vn solido*, que tiene por lo menos, dos planos opuestos paralelos, iguales, y semejantes.

12. *Paralelepipedo*, es vn solido, que consta de seis planos paralelogramos, que cada dos opuestos, son paralelos iguales, y semejantes.

13. *Cubo*, es vn solido, que consta de seis planos quadrados, como vn dado, ò piedra por todas las seis partes quadrada.

14. *Piramide*, es vn solido comprehendido de tres, ò mas triangulos, que se terminan en vn punto.

15. *Base de la piramide*, es el plano en que insiste, ò estriva, y puede ser triangulo, ò quadrilatero, &c.

16. *Vertice*, es el punto en que la piramide fenece.

17. *Piramide conica* (como en latin,) es la que tiene por base vn circulo, y fenece en vn punto alto.

18. *Exe de la piramide*, es la recta del vertice à la vase.

19. *Lado de la piramide*, es la recta del vertice à la circunferencia de la vase.

20. *Piramide recta*, es quando el exe es perpendicular à la base.

21. *Piramide obliqua*, es quando el exe no es perpendicular à la base.

22. *Cilindro*, es vn solido, cuyos dos planos opuestos, son dos circulos iguales, y paralelos.

23. *Bases del cilindro*, son los dos circulos.

24. *Exe del cilindro*, es la recta que junta los centros de las bases.

25 *Cilindro recto*, es quando el exe es perpendicular à las dos bases; y sino es obliquo, ò escaleno.

26. *Lado del cilindro*, es la recta de vna circunferencia à otra.

27. *Cilindros semejantes*, son los que tienen los exes, y diametros de las bases proporcionales; *y lo mismo es de las piramides conicas.*

28. *Esfera, globo, ó bola*, es vn solido comprehendido de vna superficie, de cuyo centro todas las lineas à la superficie son iguales, y se llaman radios, ò semidiametros.

29 *Diametro*, es la recta que passa por el centro, y se termina à vna, y otra parte de la superficie.

30. *Exe de la esfera*, es el diametro fixo, que al deredor del qual haze su revolucion el semicirculo, que la forma.

31. *Centro de la Esfera*, es el mismo que el del semicirculo, que la descrivio.

32. *Solidos regulares, y ordenados*, son los que constan de planos equilateros, y equiangulos, ò constan de planos regulares de vna misma especie. Estos no se pueden componer sino de triangulos, quadrados, ò pentagonos.

33. *Tetraedo*, es vn solido, que se comprehende con quatro triangulos equilateros, y equiangulos.

34 *Hexaedro regular*, es el que consta de seis quadrados, y se llama cubo.

35. *Octaedro*, es el que consta de 8. triangulos equilateros.

96. *Dodecaedro*, es el que consta de 12. pentagonos regulares, y equiangulos.

97. *Icosaedro*, es solido, que consta de 20. triangulos equilateros.

98. *Solido inscripto en otro solido*, es quando todos sus angulos solidos tocan los lados, ò planos del otro solido; *y este se dize circunscripto.*

LIBRO XI. Y XII. DE EUCLIDES:

DE LOS SOLIDOS.

EN este Libro se resume lo que trata Euclides en los Libros XI. y XII. de los solidos, que es todo lo que puede servir de provecho. Sus proposiciones son 98. de las quales ay dos problemas, que se dexan para el tratado de la geometria practica, las demas se reducen à las seis proposiciones que se siguen.

La mayor dificultad de este Libro està, en que las figuras de los solidos, que se forman en vna superficie plana, no pueden representar perfectamente la solidez de los cuerpos: El estudioso que entra de nuevo en esta materia, ha de considerar, que los cuerpos se descriven en perspectiva, como si fueran transparentes, para que se puedan ver los lados, y angulos opuestos. Sirva de exemplo la figura 1. del Lib. 11. en q̃ FC. representa vn cubo, ò dado, *que se termina con seis superficies quadradas.* La de enfrente, es BD. y su opuesta AE; las de los lados FB. EG. la base AC. y la superficie superior FD. Los angulos, y las lineas, no se pueden representar como son: porque DCB. y DCG. son angulos rectos iguales, y las rectas BC. CG. son tambien iguales en el cubo, pero no en la figura; y assi en los angulos, y lineas, no se ha de atender a lo que se vè descrito, sino à lo que se supone, ò se infiere por consequencia necessaria de lo ya demostrado: *Con esta atencion, no se halla mas dificultad en los solidos, que en los planos.*

PROPOSICIONES DEL LIB. 11. y 12.

PROPOSICION 1.

De el concurso en los solidos.

(a) 1l. 11 — 1 (a) *Si dos planos concurren, ó se cortan, la comun seccion es linea recta.*

(b) 2l. 11 — 2 (b) *Vna recta está toda en vn plano y si corta otro plano, es solo en vn punto.*

(c) 3l. 11 — 3 (c) *Vn triangulo está todo en vn plano, y tambien dos rectas, que concurren, y las que las corta.* *Consectario.* Si dos lineas, que en vn punto concurren, no forman angulos, ambos componen vna recta.

(d) 4l. 11 — 4 (d) *La perpendicular de vn punto a vn plano, o sobre dos rectas que se cortan, es vnica, y es la minima distancia.*

(e) 5l. 11 — 5 (e) *Si vna recta es perpendicular a otras muchas en vn punto, todas ellas estarán en vn plano: y quien forma la recta perpendicular, se haze iguales angulos con otras tres de vn plano, será perpendicular al plano.*

6 *Si vna recta es perpendicular al plano.*

Demostracion. fig. 1. l. 11. caso 1.

1 Si dos planos BE, AC, concurren, ó se cortan, digo, que la comun seccion BG, es linea recta. Porque si en el plano AC. se tira qualquiera linea recta BG, se podrá esta ajustar a qualquiera superficie plana BE: (def.6. l. 1.) luego entonces, la recta BG. será comun a los dos planos, ò comun seccion de AC. BE: luego al contrario; si el plano AC. concurre con BE, ò le corta en los puntos B. G. la comun seccion será la misma recta BG.

Si

2 *Si BX. que es parte de la recta BG. està en el plano AC. digo, que toda la recta BG. aunque se continue infinitamente està en el mismo plano.* Porque toda la recta BG. se ajusta à qualquier plano (def. 6. l. 1.) luego si la parte BX. està en el plano AC. toda BG. està en AC. *Si una recta BG. cortare à un plano EC. es solo en un punto G.* Porque si tuviera dos, ò mas puntos en el plano EC. tuviera parte en dicho plano; y assi toda estuviera en EC. *n.* 2. y no le cortara, que es contra la suposicion.

3. *Qualquier triangulo ABG. està en un plano:* Porque si en un plano se considera el triangulo BCG. y sus tres lados BC. CG. GB. iguales à BA. AG. GB. se ajustarà todo el triangulo ABG. (4. l. 1. n. 1.) con BCG. luego el triangulo ABG. estarà en una superficie plana; como BCG. *Si dos rectas AB. AG. se cortan, estàn en un plano.* Tomando en ellas dos puntos B. G. serà BG. linea recta (def. 4. l. 1.) y ABG. triangulo: Luego sus lados, ò rectas AB. AG. estàn en un plano *num.* 3. *y tambien BG. que corta las dos.*

4 *Si FA. es perpendicular al plano AC. ò à dos rectas que se cortan AG. AB. digo, que de un punto del plano A. ò elevado F. es unica.* Porque si de A. se tira qualquiera otra AR. cortarà à FA. y estaràn en un plano AF. AR. *n.* 3. que continuado harà la seccion recta AB. *n.* 1. y porque FA. es perpendicular al plano AC. es el angulo FAB. recto (def. 3.) y mayor, que su parte RAB. (9. p.) luego RAB. es agudo; y assi RA. no es perpendicular al plano AC. (def. 3.) Lo mismo es de dos rectas, que se cortan, por estar en solo un plano. *Assi mismo.* Si del punto elevado F. se tira qualquiera otra FB. serà FAB. un plano triangulo *n.* 3. y el angulo FAB recto (def. 3.) y ABF. agudo (5. l. 1. n. 5.) luego FB. no es perpendicular al plano, (def. 3.) y assi FA. es unica. *La perpendicular FA. es la minima distancia del punto elevado F. al plano.* Porque qualquiera FB. se opone al angulo recto A. mayor, que ABF. (5. l. 1. n. 3.)

5. *Si la recta BL. es perpendicular à BA. BC. en B. digo, que es perpendicular al plano AC.* Porque si BN. se considera perpendicular al plano AC. lo serà tambien à BG. BA. (def. 3.) y serà

la

PROPOSICIONES DEL LIB. 11. y 12.

PROPOSICION 1.

De el concurso en los solidos.

(a) 3 l. 11 1 (a) *Si dos planos concurren, ó se cortan, la comun seccion es linea recta.*

(b) 1 l. 11 2 (b) *Vna recta está toda en vn plano y si corta otro plano, es solo en vn punto.*

(c) 2 l. 11 3 (c) *Vn triangulo está todo en vn plano; y tambien dos rectas, que concurren, y las que las corta.* Consectario. Si dos lineas, que en vn punto concurren, no forman angulos, ambos componen vna recta.

(d) 4 l. 11 4 (d) *La perpendicular de vn punto a vn plano, o sobre dos rectas que se cortan, es vnica, y es la minima distancia.*

(e) 5 l. 11 5 (e) *Si vna recta es perpendicular a otras muchas en vn punto, todas ellas estarán en vn plano, a quien será la recta perpendicular.*

6 *Si vna recta haze iguales angulos con otras tres de vn plano, será perpendicular al plano.*

Demostracion fig. 1. d. 1 1. caso 1.

1 *Si dos planos BE, AC, concurren, ó se cortan, digo, que la comun seccion BG, es linea recta.* Porque si en el plano AC, se tira qualquiera linea recta BG, se podrá esta ajustar a qualquiera superficie plana BE: (def. 6. l. 1.) luego entonces, la recta BG, será comun a los dos planos, ó comun seccion de AC, BE: luego al contrario; si el plano AC, concurre con BE, ó le corta en los puntos B, G, la comun seccion será la misma recta BG.

Si BX. que es parte de la recta BG. està en el plano AC. digo, que toda la recta BG. aunque se continue infinitamente està en el mismo plano. Porque toda la recta BG. se ajusta à qualquier plano (def. 6. l. 1.) luego si la parte BX. està en el plano AC. toda BG. està en AC. *Si una recta BG. corta à un plano EC. es solo en un punto G.* Porque si tuviera dos, ò mas puntos en el plano EC. tuviera parte en dicho plano, y assi toda estuviera en EG. *n.* 2. y no le cortara, que es contra la suposicion.

3. *Qualquier triangulo ABG. està en un plano.* Porque si en un plano se considera el triangulo BCG. y sus tres lados BC. CG. GB. iguales à BA. AG. GB. se ajustarà todo el triangulo ABG: (4. l. 3. n. 1.) con BCG. luego el triangulo ABG. estarà en una superficie plana; como BCG. *Si dos rectas AB. AG. se cortan, estàn en un plano.* Tomando en ellas dos puntos B. G. serà BG. linea recta (def. 4. l. 1.) y ABG. triangulo: Luego sus lados, ò rectas AB. AG. estàn en un plano *num.* 3. *y tambien BG. que corta las dos.*

4 *Si FA. es perpendicular al plano AC. ò à dos rectas que se cortan AG. AB. digo, que de un punto del plano A. ò elevado F. es unica.* Porque si de A. se tira qualquiera otra AR. cortarà à FA. y estaràn en un plano AF. AR. *n.* 3. que continuado harà la seccion recta AB. *n.* 1. y porque FA. es perpendicular al plano AC. es el angulo FAB. recto (def. 3.) y mayor, que su parte RAB. (9. p.) luego RAB. es agudo; y assi RA. no es perpendicular al plano AC. (def. 3.) Lo mismo es de dos rectas, que se cortan, por estar en solo un plano. *Assi mismo.* Si del punto elevado F. se tira qualquiera otra FB. serà FAB. un plano triangulo *n.* 3. y el angulo FAB. recto (def. 3.) y ABF. agudo (5. l. 1. n. 5.) luego FB. no es perpendicular al plano, (def. 3.) y assi FA. es unica. *La perpendicular FA. es la minima distancia del punto elevado F. al plano.* Porque qualquiera FB. se opone al angulo recto A. mayor, que ABF. (5. l. n. 3.)

5. *Si la recta BL. es perpendicular à BA. BC. en B. digo, que es perpendicular al plano AC.* Porque si BN. se considera perpendicular al plano AC. lo serà tambien à BG. BA. (def. 3.) y serà

la misma BL. *n. 4. Si BL. es perpendicular à BA. BG. BC. las tres estàn en vn plano, à quien es perpendicular BL.* Porque el plano LBG. haze en AC. la recta bG. *n.* 1. y el angulo LbG. recto *n.* 5. como LBG. y pues del punto G. en vn plano LBG. es la perpendicular vnica (5. l. 1. n. 9.) y *n.* 4. son Gb. GB. vna recta, y estàn BA. BG. BC. en vn plano, à quien LB. es perpendicular.

6. *Si la recta LB. haze tres angulos iguales LBA. LBG. LBC. en vn plano AC: digo, que todos son rectos, y LB. es perpendicular al plano AC.* Porque si de B. se descrive el arco AXC. y de vn punto L. se tiran LA. LX. LC. en los triangulos LBA. LBX. LBC. son los lados BA. BX. BC. iguales radios, y LB. comun, y los angulos comprehendidos iguales: Luego todo es igual LA. LX. LC. (4. l. 1. n. 2.) Considerese pues de L. vna perpendicular Lb. al plano AC. y tiradas bA. bX. bC. seràn los angulos en b. rectos; y el quadrado de LA. igual à los dos de Lb. bA. y el de LX. à los de Lb. bX; y el de LC. à los de Lb. bC. (4. l. 2. n. 1.) y quitado el comun Lb. seràn iguales los quadrados, y rectas bA. bX. bC. (15. p.) y porque de B. à la circunferencia, van tres rectas iguales, serà b. centro del circulo, y el mismo punto B. (1. l. 3. n. 2.) luego Lb. LB. son vna recta perpendicular al plano AC. y los tres angulos en B. rectos.

DEMOSTRACION DE LOS NUMEROS 4. Y 6. CON estilo analytico.

Suposicion. Sea el plano AC. paralelogramo, y sus diagonales que le parten, y se parten por medio, sean AC. y BG. y el punto del concurso donde se parten las diagonales sea X. sobre el qual se imaginarà, que cae del punto elevado L. la perpendicular LX. y del mismo punto L. à los estremos de las dichas diagonales, las rectas LA. LB. LG. y LC.

Demostracion del n. 4. Es el lado, ò recta BX. $\frown$ XG. y la AX. $\frown$ XC. (7. l. 1. n. 2.) item la recta GX. $\frown$ XC. $\frown$ BX. $\frown$ AX. $\frown$ GX. (7. l. 1. n. 2.) luego las distancias de las rectas LB. y LG. de la perpendicular LX. son iguales; y del mismo modo

las

las de las LA. y LC. luego serâ la recta LB = LG. y la LA = LC. (5. l. 1. n. 8.) Luego (por la misma) serâ el angulo BLX = GLX, y à LX = CLX: Luego es el triangulo isoceles BLG = ALC. (4. l. 1. n. 1.) pero siendo la recta LX. por suposicion, perpendicular, serân todos los angulos en el punto X. rectos (def. 11. y 12. l. 1.) y por consiguiente, serân en todos los triangulos ALX. BLX. GLX. y GLX. los angulos en L. agudos, (3. l. 1. n. 5.) pero como en qualquier triangulo, el lado mayor es el que se opone â mayor angulo (5. l. 1. n. 3.) siendo en los referidos triangulos, el mayor angulo el recto, que se forma en el punto X. serán las rectas opuestas à dicho angulo, mayores, que la perpendicular; Esto es LB +- q. LX. y LA +- q. LX. y LG. +- q. LX. &c. Luego la LX. es la vnica, y minima distancia de las rectas, que del punto L. se pueden tirar.

Aviendose probado el num. 4. quedan probados los num. 5. y 6.

PROPOSICION 2.

De las paralelas en los solidos.

1 (a) *Dos paralelas estan en vn plano, con la que las corta.* (a) 7 l. 11

2 (b) *Dos perpendiculares à vn plano, estan en otro, y son paralelas.* (b) 6 l. 11

3 (c) *Si vna de las paralelas es perpendicular a vn plano, todas lo son.* (c) 8 l. 11

4 (d) *Las paralelas à otras, lo son entre si, aunque en diferentes planos.* (d) 9 l. 11

5 *La que corta el plano de otra, no es paralela, y esta por vn punto es vnica.* 10 l. 11

Demostracion, fig. 1. lib. 11.

1 *Si AB. CD. son paralelas: digo, que estan en vn plano, y tambien EF. que las corta.* Porque si GA. es perpendicular à AB, y BD. à CD. juntese la recta AD. y dividida igualmente en G. sean GE. GF. paralelas à BD. AC. y serà como AG. mitad de AD: assi GE. mitad de BD; y GF. mitad de AC. (2. l. 5. n. 9.) y pues AC.

BD.

BD. EF. se suponen iguales distancias, seran GE. GF. iguales à BD. ò EF: (9. p.) Luego EG. GF. son vna recta: porque si fueran dos rectas en vn punto G, que formaran angulo EGF, los lados EG. GF. serian mayores que EF. (5. l. 1. n. 4.) luego porque EGF. es vna recta (consect. 1. l. 11. n. 3.) que està en los planos ABD. ADC; y està en vn solo plano: son ABD. ADC vn solo plano, (1. l. 11. n. 2.) con que las paralelas AB. CD. y EF. ò AD. que las corta, estan en vn plano.

2 *Si BL. GE. (fig. 1. l. 11. caso 1.) son perpendiculares al plano AC: digo, que estan en vn plano, y son paralelas.* Porque si por la recta BG. se considera el plano NBGe. perpendicular â AC. y en èl son Ge. BN. perpendiculares à la comun seccion BG. seran tambien perpendiculares al plano AC. (def. 5.) y seran (consect. 1. l. 11. n. 3) las mismas GE. BL. por ser vnica la perpendicular de cada punto: (1. l. 11. n. 4.) Luego GE. BL. estan en vn plano NBGE: y por ser los angulos internos LBG. BGF. dos rectos, son paralelas. (2. l. 1. n. 3.)

3 *Si BL. GE. son paralelas, y GE. es perpendicular al plano AC: tambien lo serà BL.* Porque GE. BL. estan en vn plano B.GE. *num.* 1 Si por B. se considera BN. perpendicular al plano AC. estarà en el plano BGE. y serà paralela à GE: *num.* 2. luego porque en vn mismo plano son BN. BL. paralelas à GE. por vn punto B. son vna recta (consect. 1. l. 11. n. 3.) y BL. perpendicular como BN. y GE.

4 *Si GE. CD. son paralelas à BL: digo, que lo son entre si, aun que no esten las tres en vn plano.* Porque GE. es perpendicular al plano AC. tambien lo seran CD. BL. *num.* 3. luego CD. BL. son paralelas. *num.* 2.

5 *Si AL. corta alguno de los planos en que pueda estar GC, no serà su paralela.* Sea qualquiera plano AC, que passe por GC; y AL. le corte en A. por A. en el plano AC. sea AB. paralela à GC. si AL. fuera tambien paralela à GC, serian AL. AB. paralelas *num.* 4. y pues AL. AB. no son paralelas, porque se cortan: tampoco lo son AL. GC.

Por el punto A. la paralela à GC. es vnica: Porque ha de estar en el plano AGC, y por vn punto A. de vn plano, es la paralela AB.

AB. vnica á GC. y no puede ser otra, que la AB. por que si lo fuera otra, no seria parale la AGC. por no poder distar igualmente. (def. 25. l. 1.)

OTRA DEMOSTRACION DEL NVM. 1.

Se supone en el theorema del num. 1. (fig. 1.) que la recta EF. corta las dos paralelas AB. y CD. y que està con ellas en vn mismo plano.

Demostracion, Si la EF. que corta las paralelas AB. CD. no estuviere con ellas en vn mismo plano, cortese el plano de las paralelas con otro plano por los puntos E. y F. y serà la seccion comun EGF. linea recta (11 l. 11. n. 1.) luego dos rectas EF. EGF. cerraran espacio contra la (def. 16. l. 1.) luego la recta EF. que corta las paralelas, està con ellas en vn mismo plano.

SCHOLIO. *Lo mismo se demuestra de qualesquiera otras rectas, aũque no seã paralelas, como estèn en vn mismo plano. Entre dos lineas paralelas, ó entre qualesquiera dos rectas, no se puede concebir mas que vn mismo plano.*

PROPOSICION 3.

De los planos en los solidos.

1 (a) *Si vna recta es perpendicular á vn plano, los planos por ella tambien lo son.* (a) 18 l. 11

2 (b) *Si dos planos son perpendiculares á otro, tambien lo es su comun seccion, y al contrario.* (b) 16 l. 11 (c) 16. l. 11

3 *Los planos paralelos, tienen comun perpendiculo, y al contrario.* (d) 15 l. 11

4 (c) *Si vn plano corta planos paralelos, las secciones son paralelas.* (e) 10. l. 11.

5. (d) *Los planos por rectas paralelas, ó son paralelos, ó hazen secciones paralelas.* (f) 20 l. 11.

6 (e) *Si los angulos son paralelos, son iguales, y en vn plano, ó en planos paralelos.* (g) 21. l. 11

7. (f) *Si muchos angulos planos comprehenden vn angulo solido, el mayor de todos es menos, que la suma de los otros (g) y todos menos que 4. rectos.*

(b) 24 l. 11 8. (b) *Si seis planos paralelos comprehenden vn paralelepipedo, todos son paralelogramos, y los oppuestos son iguales, y semejantes.*

DEMOSTRACION fig. 1. l. 11. caso 1.

1 *Si la recta GE. es perpendicular al plano AC. digo, que qualquier plano BE. por ella es tambien perpendicular.* Porque si en dicho plano BE. de qualquier punto L. se tira LB. perpendicular à la comun seccion BG. seràn los angulos internos LBG. BGE. dos rectos, y LB. EG. paralelas (2. l. 1. n. 3.) y LB. perpendicular al plano AC. como EG. (2. l. 11. n. 2.) luego porque todas las perpendiculares à la comun seccion, son perpendiculares al plano; serà el plano BE. perpendicular à AC. (def. 5. l. 11.)

2. *Si BE. CE. son perpendiculares al plano AC: digo, que tambien lo es su seccion GE.* Porque si de G. punto inferior comun se considera Ge. en el plano CE. perpendicular à la seccion GC; serà Ge. perpendicular al plano AC. (def. 5. l. 11.) Lo mismo es de GE. en el plano BE. Luego porque la perpendicular es vnica del punto G. (2. l. 11. n. 5.) son Ge. GE. vna recta (cons. 1. l. 11. n. 3.) que està en los dos planos, y assi es comun seccion, y perpendicular. *Al contrario.* Si GE. fuere comun seccion de BE. CE. y perpendicular à AC. seràn los planos perpendiculares, porque passan por la perpendicular GE. n. 1.

3 *Si los planos FD. AC. son paralelos: digo, que tienen comun perpendiculo LB.* Sea LB. perpendicular à AC. y de qualesquiera dos puntos G. C. sean sus paralelas GE. CD. y seràn perpendiculares à CA. (2. l. 11. n. 3.) y las 3. BL. CD. GE. iguales distancias de los planos paralelos: Luego BD. es paralelogramo, (7. l. 1. n. 1.) y rectangulo; pues B. y C. son rectos. Lo mismo es de BE. y pues los angulos BLD. BLE. son rectos; serà BL. perpendicular al plano LED. que es el plano FD. (1. l. 11 n. 4.) con que FD. AC. tienen comun perpendiculo LB. *Al contrario.* Si BL. es perpendicular comun à FD. y AC. y son AF. GE. CD. sus paralelas, seràn tambien perpendiculares comunes (2. l. 11. n. 3.) y BF. BE. BD. rectangulos: luego AF. BL. GE. CD. son lados, y dis-

tan-

tancias iguales (7. l.1. n. 1.) y los planos FD. AC. equidistantes. *Assi mismo.* Si FD. AC. son paralelos, el plano BE. serà perpendicular comun, pues passa por el comun perpendiculo LB. *n.* 1. *Al contrario.* Si BE. es perpendicular comun à FD. AC. passarà por algun perpendiculo comun LB. *n.* 1. luego FD. AC. son paralelos *n.* 3.

4 *Si el plano BE. corta dos planos paralelos FB. EC: digo, que las secciones BL. GE. son paralelas:* Porque si el plano AC. es perpendicular à la seccion BL. serà perpendicular à BF. BE. *n.* 2. y porque BF. CE. son paralelos: serà AC. perpendicular à CE. como à BF. y BE. *n.* 3. Luego las secciones BL. GE. son perpendiculares à CA. *n.* 2. y entre si paralelas (2. l.11. n. 1.)

5 *Si BL. GE. son paralelas, los planos BF. CE. por ellas, pueden ser paralelos.* Porque BL. GE. pueden ser dos secciones, que haze el plano BE. en dos paralelos BF. CE. *n.* 4. *Pero si los planos BD. DG. no son paralelos, su seccion DC. serà paralela à BL. GE.* Porque siendo el plano AC. perpendicular à las dos paralelas BL. GE, (2. l.11. n. 2.) serà perpendicular à los 3. BE. EC. CL. luego AC. es perpendicular à la seccion CD. *n.* 2. y es CD. paralela à BL. GD. (2. l. 11. n. 3.)

6 *Si los angulos DLE. CBG. tienen los lados paralelos DL. CB. y LE. BG. digo, que son iguales, y que estàn en vn plano, ò en planos paralelos.* Tomense iguales LD. LE. BC. BG. y por ser iguales paralelas LD. BC. seràn iguales, y paralelas BE. CD. (7. l. 1. n. 1.) y tambien BL. GE. Luego GE. CD. son iguales (11. p.) y paralelas (2. l. 11. n. 4.) y tambien ED. GC. que las juntan: (7. l. 1. n. 1.) luego por ser los tres lados de ELD. iguales à los 3. de GBC. todo es igual, y el angulo ELD. al angulo GBC. (4. l. 1. n. 1.) Luego si los planos ELD. GBC. son diferentes, seràn paralelos, porque son los mismos triangulos paralelos.

7 *Si muchos angulos planos (fig. 2. l. 11. casos 2. 3.) PXQ. QXS. SXZ. comprehenden vn angulo solido X. digo, que el mayor PXQ. es menor, que los dos juntos QXS. SXZ.* Porque si fuera igual à los dos, se ajustara, formando vna superficie plana (14. p.) y no comprehenderia espacio solido, y mucho menos, si fuera menor.

Todos juntos son menores, que 4. rectos, Porque si fueran tanto como 4. rectos hizieran vna superficie plana (*r.* l. 1. n. 4.) *Si el mayor PXQ.* es menor, que los otros, y todos menos que 4. rectos, cortado el espacio PXZ. si se juntan XZ. XP. se relevarà el punto X. *num.* 8. y formarà el angulo solido X. De otra suerte no se puede formar.

Esta proposicion de Euclides se debe entender, si la inclinacion de los planos es à la parte interior; porque si fuera à la parte exterior, podràn ser todos los angulos tanto como 4. rectos, como se puede ver en la base de vna piramide, que està en forma de estrella.

8. *Si FC. es paralelepipedo, digo 1. que los seis planos que le comprehenden son paralelogramos* (fig. 1. l. 11. caso 1.)

Porque el plano EC. corta à los dos planos FD. AC. seràn las secciones ED. GC. paralelas *n.* 3. y estàn en vn plano (2. l. 11. n. 1.) Assi mismo el plano CE. corta à los paralelos FG. LC. y las secciones EG. DC. son paralelas *n.* 4. Luego EC. es paralelogramo, (def. 26. l. 1.) lo mismo se demuestra de FD. FB. &c. *Digo, 2. que cada dos opuestos son iguales, y semejantes.* Porque los lados opuestos FL. ED. GC. AB. son iguales (7. l. 1. n. 1.) y tambien FA. LB. DC. EG. y los angulos FLB. EDC. son iguales, por ser paralelos *numer.* 6. como AFL. GED. Luego los dos opuestos paralelogramos FB. EC. por tener los lados, y angulos iguales, se pueden ajustar, y son iguales, y semejantes (14. p.) Lo mismo se demuestra de FD. AC. y de FG. LC.

DEMOSTRACION DE EL NVMER. 7. CON ESTILO *Analytico.* fig. 1. caso 3.

Si vn angulo solido X. està contenido de tres angulos rectilineos planos PXQ. QXS. SXP. qualesquiera dos juntos son mayores que el tercero. Si todos tres son iguales, es claro, que dos juntos son mayores que el tercero. Si son desiguales, sea el *maximo* QXS. digo, que es menor que los otros dos juntos. *Prevencion.* Hagase el angulo (prob. 4. n. 1.) QXr igual QXP. y cortense las Xr. XP. iguales entre si.

De-

Demostracion. En los triangulos QXr. QXP. que tienen comun el lado QX. es el lado, *prevencion*, Xr ⊥ XP. y el angulo QXr ⊓ QXP: Luego (4. l. 1. n. 2.) la base Qr. ⊓ QP; pero (5. l. 1. n. 4.) los lados QP +− PS +− q. QS: Luego (16. p.) PS +− q. rS: Luego en los triangulos PXS. y rXS. que tienen comun el lado XS. y el lado *construccion*, PX ⊓ Xr. y por lo demostrado, la base PS +− q. rS. será el angulo PXS +− q. rXS; (6. l. 1. n. 1.) pero el angulo QXP ⊓ QXr: Luego PXS +− QXP +− q. rXS +− QXr: pero rXS. +− QXr ⊓ QXS: Luego QXP +− PXS +− q. SXQ. que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION 4.

De la seccion de los solidos.

1 (a) *Si una piramide se corta con un plano paralelo á la base, la seccion es semejante á la base; y las rectas del vertice se cortan con proporcion, y al contrario.* (a) 13 l. 12

2 *Si una piramide tiene la base paralelograma, el plano por el vertice, y angulos opuestos, la parte igualmente.*

3 *Si el paralelepipedo, prisma, ó cilindro, se cortan con un plano paralelo á la base, la seccion es en todo igual á la base.*

4. (b) *Y los segmentos solidos, son proporcionales á los de los lados, y al contrario.* (b) 25 l. 11

5 (c) *Si un paralelepipedo se parte con un plano por los angulos opuestos de los planos opuestos, serán los segmentos dos prismas iguales.* (c) 28 l. 11

6 *Qualquier prisma poligono se divide en prismas triangulares, que son dos menos, que sus lados. Lo mismo es de las piramides poligonas.*

Demostracion, fig. 3. l. 11. casos 1. 2. 3.

1 *Si á la piramide VXZD. la corta el plano QRT. paralelo á la base: digo, que la seccion QRT. es semejante á la base VXZ.* Porque los planos paralelos VXZ. QRT. se cortan con los planos de la piramide VXD. &c. serán las secciones paralelas VX. QR.

(3 l. 11. n. 4.) y tambien XZ. RT; y ZV. TQ: Luego los angulos paralelos VXZ. QRT. son iguales (3. l. 11. n. 6.) y XZV. RTQ; y ZVX. TQR: Luego los triangulos equiangulos son semejantes (1. l. 6 n. 1.) Lo mismo se demuestra de XYZ. RST. y de las poligonas, &c. y tambien de la piramide conica.

Los segmentos, ó rectas del vertice se cortan con proporcion, ó son proporcionales. Porque por las (paralelas) como VX. à XD. assi QR. à RD; (2 l. 6. n. 2.) y alternando, &c. (4 l. 5. n. 1.) *Al contrario.* Si VX. à QR. &c. es como XD. à RD: seràn VX. QR. paralelas, y XZ. RT. &c. (2 l. 6 n. 2.) Luego porque son los angulos paralelos en diferentes planos, son estos paralelos. (3 l. 11. n. 6.)

2 *La piramide VXYZD. tiene la base paralelograma: digo, que el plano DXZ. por el vertice, y los dos angulos de la base opuestos, la parte igualmente.* Porque la base VY. con la seccion XZ. se parte igualmente (7 l. 1. n. 2.) y en qualquiera parte que se considere el plano QS. paralelo à la base, serà la seccion QS. semejante à VY; *num.* 1. y serà QRT. igual à RST: (7. l. 1. n. 2.) Luego porque los segmentos solidos VXZD. XYZD. se componen de planos, siempre iguales, son iguales entre si. (10. p.)

3 *Si en la (figura 4. l. 11.) el prisma CH. se parte con el plano POQ. paralelo à la base: digo, que POQ. es en todo igual à CBD.* Porque siendo CP. BO. paralelas (def. 11. l. 11.) y CB. OP. (3. l. 11 n. 5.) son estas iguales, (7. l. 1. n. 1.) y assi mismo BD. OQ; y DC. QP. y los angulos CBD. POQ. paralelos iguales (3 l. 11. n. 6.) y assi de los otros: Luego porque todos los lados, y los angulos se corresponden iguales, se ajustaràn las figuras, y son iguales CBD. POQ: (14. p.) Lo mismo se demuestra en el paralelepipedo, de GA. PN; y en el prisma poligono (fig. 3. caso 2.) de los planos QPTSR. EDHGF. &c.

4 *Y los segmentos del solido tienen la razō q̄ los de los lados.* (fig. 4 Porque si el plano PN. corta igualmente todos los lados del paralelepipedo CE. por ser PN. GA. en todo iguales *n.* 3. se ajustaràn (14. p.) y el plano CO. con PE. y assi de los otros: Luego todo el solido CN. se ajustarà con PE. y assi son iguales (14. p.) *Si el plano LL.* parte igualmente los lados CP. BO. &c. serà como

añtes CI. igual à LN. y como CL. vn quarto de CG. afsi CI. vn quarto de CE; y LE. triplo de LN. como LG. de LP. &c. y afsi infinitamente: Luego los fegmentos del folido tienen la razon que los fegmentos de los lados. *Lo mifmo fe demueftra en el prifma triangular, y poligono, y en el cilindro, que es como prifma de infinitos lados.*

5 *Si el paralelepipedo CE. fe corta con el plano BH. por los angulos opueftos: digo, que los fegmentos fon dos prifmas iguales.* Porque fi vn plano PN. fube paralelo à la bafe CA: en qualquiera parte, que fe confidere, ferà PN. igual à CA. n. 3. y el plano BH. harà la feccion OQ. (1. l. 11. num. 1.) y ferà igual POQ. à ONQ. (7. l. 1. n. 2.) Luego los fegmentos folidos BDG. BDE. fon iguales, por componerfe fiempre de planos iguales (10. p.)

6. *El prifma poligono fe divide en prifmas triangulares* (fig. 3. l. 11. cafo 2.) Qualquier lado QE. eftà en vn plano con qualquier otro fu paralelo: (2. l. 11. n. 1.) Luego los planos QG. QH. dividen en prifmas triangulares al poligono, y fon dos menos que los lados. Lo mifmo es de todo genero de poligonos y de las piramides poligonas, porque fe dividen en piramides triangulares.

DEMOSTRACION DEL NVMERO 4. CON ESTILO *analytico fig. 4.*

Prevencion. Al paralelepipedo CE. cortele el plano PN. por medio à cuya mitad CN. cortele por medio el plano LI. y la altura, ò lado CG. fea de 8. pies; y el lado CB. de 2. pies; y el lado BA. de 3. pies, y fiendo la bafe BD. de 6. pies, ferà la folidez del paralelepipedo CE. de 48. pies.

Demoftracion. Como vn todo, à otro todo, afsi la parte, à la parte femejante, ò de la mifma denominacion. (5. l. 5. n. 1. 2. &c.) Luego como el paralelepipedo CE. al altura, ò lado CG. afsi CN. mitad del paralelepipedo, à CP. mitad del lado CE. y alternando (4. l. 5. n. 1.) como CE. CN :: CG. CP. y como CN. CI :: CP. CL.

(5.

(5. l. 5. n. 3.) luego los segmentos solidos, son proporcionales à los segmentos de los lados; ò todo el solido CB. es igualmente multiplice del solido CN. como lo es el lado CG. de CP. y todo el solido CN. es igualmente multiplice del solido CI. como lo es el lado CP. del lado CL. (def. 14. l. 5.) que es lo que se avia de probar.

PROPOSICION. 5.

DE LOS SOLIDOS DISIMILES.

(a) 28 l. 11. 1. (a) *El prisma triangular es medio paralelepipedo.*

(b) 7. l. 12. 2. (b) *La piramide es el tercio del prisma, con la misma base, y altura; (c) y la conica del cilindro.*

(c) 10 l. 12. 3. (d) *Los paralelepipedos, prismas, y (e) cilindros con igual altura, tienen la razon, que las bases, y al contrario, y tambien en las*
(d) 32 l. 11. *piramides entre si, conicas, y triangulares.*

(e) 11. 14. l. 12. 4. *los mismos tienen la razon compuesta de las bases, y alturas, y tambien las piramides entre si triangulares, y conicas.*

(f) 29. 30. 31. 34. 40 l. 11. y 9. 15. l. 12. 5. (f) *Si tienen las bases, y alturas recipracas son iguales; y al contrario, y tambien las piramides entre si; y si tienen una misma base, y altura, ó iguales, son iguales.*

(g) 36 l. 11. 6. (g) *Si de tres continuas se forma un paralelepipedo, será igual al que se forma de la media con igual angulo.*

DEMOSTRACION fig. 4. l. 11.

1 *El prisma triangular BDG. es medio paralelepipedo.* Porque si BA. DA. son paralelas à CD. CB. y AE. à BF. DH; y FE. HE. à GH. GF. será GA. paralelepipedo (def. 12.) y el plano BH. le parte en dos prismas iguales (4. l. 11. n. 5.) Luego el prisma BDG. es la mitad de GA. que es el paralelepipedo.

2 *En la (fig. 3. l. 11. caso 3.) la piramide CBAE. es un tercio del prisma BDF. con igual base, y altura.* Sean CD. AF. paralelas à BE. y el plano EDF. à BCA. y será BDF. un prisma (def. 11.)

y los planos CF. DB. BF. paralelogramos; y los tres puntos D. A. E. en vn plano. (1.l.11.n.3.) Luego porque la piramide CDFAE. tiene la base paralelograma, y el plano DEA. la parte igualmente por el vertice E. y angulos opuestos D. A. son iguales segmentos DFAE. CDAE (4.l.11.n.2.)

Tambien la piramide BCDEA. tiene la base BD. paralelograma, y el plano AEC. la parte igualmente por el vertice A. y angulos C. E. (4.l.11.n.2.) y son tambien iguales CBAE. CDAE: Luego tambien son iguales entre si CBAE. DFAE. (11.p.) luego las tres dividen el prisma en tres partes iguales, y es cada vna vn tercio, &c.

Lo mismo es de las piramides poligonas; porque assi ellas, como los prismas poligonos, se dividen en triangulares; (4.l. 11. n. 5.6.) y considerado el circulo como poligono de infinitos lados, milita lo mismo en la piramide conica, y cilindro, segun se explicarà mas abajo.

3 *Si los paralelepipedos BQ. RZ (fig.4.l.11.) tienen igual altura, ó estan entre dos planos paralelos: digo, que tienen la razon que las bases AC. RT.* Porque si los planos CA. TR. son vno mismo; y PN. ZX; y qualquiera otro plano LI. VS. sube paralelo, en qualquiera parte que se considere, serà LI. igual à CA. y VS. à TR. (4.l. 11. n. 3.) Luego LI. à VS. como CA. à TR. (2.l.5. n.1.) y assi infinitamente, sin que se puedan considerar mas planos en PA, que en ZR; por tener igual altura: Luego PA. y ZR. tienen la misma razon que los planos de que constan (4.l.5.n.2.) y assi son como la base CA. à TR. &c.

Si los paralelepipedos GA. ZR. tienen iguales bases CA. TR: digo, que tienen la razon de las alturas. Si la altura BO. se toma igual à RX. serà PA. igual à ZR. Como la base CA. à TR; *num. 3.* y pues GA. à PA. es como GC. à PC. (4.l.11.n. 4.) serà tambien GA. à ZR. como la altura GC. à PC. que es XR. (2.l. 5. n.1.) *Al contrario.* Si dichos solidos tienen la razon que las alturas, tendran igual base; y si la de las bases, tendran igual altura. Todo como en los paralelogramos. (1.l.6.n.1.)

Estas demostraciones son vniversales, aunque los solidos sean de dis-

a ferente especie; pues en lugar de ZY. que es paralelepipedo, se puede substituyr vn prisma, ó cilindro, ó al contrario, &c. Lo mismo de las piramides angulares, ó redondas entre si, porque son el tercio de los prismas, y cilindros de igual base, y altura, aunque sus bases no sean semejantes, ú de vna misma especie.

4 *El paralelepipedo, prisma, ó cilindro ZY. à otro GA. tiene la razon compuesta de las bases, y alturas. Esto es, si X. á Z. es como la base TY. á CA. y es Z. á Y. como la altura TZ. á CG: digo, que ZY. á GA. es como X. à Y.*

La altura CP. sea igual à TZ. y el plano PN. paralelo à CA. y serà el solido ZY. à PA; como la base TY. à CA. ò como la linea x. à z: *num.* 3. y el solido PA. à GA. sobre vna base, como la altura PC. que es TZ. à GC. ò Z. à Y. *num.* 3 Luego las razones compuestas de iguales son iguales, *exequo* ZY. à GA. como x. à Y. (1. l. 5. n. 4.) que es la razon compuesta de x à z. y de z. à Y. Esto es de las bases, y alturas. *Lo mismo es, que se compare vn prisma con vn cilindro; y dos cilindros, ó prismas entre sí, ó vna piramide angular à vna conica, ó al contrario, &c.*

5 *Los mismos ZY. GA. si tienen las bases, y alturas reciprocas TY. á CA. Como GC. á ZT. serán iguales.* Porque si PC. es igual à ZT; y PN. paralelo à CA. serà GA. à PA. como GC. à PC. (4. l. 11. n. 4.) y ZY. à PA. *por tener igual altura*, como TY. à CA. *num.* 3. Esto es como GC. à PC. Luego GA. y ZY. tienen vna misma razon à PA. y assi son iguales (2. l. 5. n. 3. (*Al contrario.* Si ZY. y GA. son iguales, tendràn la misma razon à PA. (2. l. 5. n. 1. 3. (y serà GC. à PC. ò ZT. como TY. à CA. *numer.* 3. luego las alturas, y bases son reciprocas. *Lo mismo es*, si se compara con vn prisma, con vn cilindro, ò paralelepipedo, &c. y vna piramide angular à otra conica, &c.

6 *Si AB. BC. BF. son tres continuas, y de ellas se forma el paralelepipedo GA; é Yq. qT. TZ. son iguales á la media BC. y forman el cubo ZY. digo, que GA. y ZY. son iguales.* Porque el quadrado qp. de la media BC. es igual al rectangulo FA. de las estremas AB. BF. (11. l. 6. n. 6. (y tomando à FA. y à qp. como bases, y por sus alturas à BC. y à qT. que se suponen iguales: seràn

son GA. y ZY. iguales num. 3. Esto es el paralelepipedo GA. igual al cubo ZY. *Tambien* son iguales, pues tienen tambien las bases, y alturas reciprocas.

DEMOSTRACION DEL NUMER. 4. CON ESTILO *Analytico*.

Con el mismo methodo que se demostrò el n. 4. de la (1. l. 6.) se demuestra este; solo que en lugar de la base rectilinea, que en las figuras planas se supone, son en los solidos, las bases *planos*.

Prevencion. Sean los solidos ZY. y GA. y la base TY. del I. llamese *T.* y sea de 3. pies; y su altura TZ. de seis pies, llamese *Z.* la base CA. del II. llamese *C.* y sea de 4. pies, y su altura CG. de 8. pies, llamese *G.*

Demostracion. Es el solido ZY ∽ TZ y el solido GA ∽ CG. (prob. 7. n. 4.) Luego la razon de $\frac{ZY.}{GA}$ ∽ $\frac{TZ.}{CG.}$ (2. l. 5. n. 1.) pero la razon $\frac{TZ.}{CG.}$ ∽ $\frac{T.}{C.} \times \frac{Z.}{G.}$ Esto es, los productos, ò compuestos tienen la razon de sus bases, y alturas de quienes se componen (def. 9. y 10. l. 6.) luego la razon de los paralelepipedos $\frac{ZY.}{GA.}$ ∽ $\frac{T.}{C.} \times \frac{Z.}{G.}$ porque las razones compuestas de iguales son iguales, (1. l. 5. n. 4.) y assi concluygo, que los paralelepipedos prismas, y cilindros disimiles, tienen la razon compuesta de sus bases, y alturas, que es la misma que tienen sus productos, y sus partes componentes. La misma razon milita en las piramides triangulares, y conicas.

PROPOSICION 6.

DE LOS SOLIDOS SEMEJANTES.

1 *Los semejantes à otro son semejantes entre si; y todos se resuelven en piramides semejantes.* (a) 33. l. 11

2 (a) *Tienen la razon triplicada de los lados homologos* (b) *y las esferas de los radios, ò diametros.* (a) 8. 12. l. 12. (b) 16. l. 12

(c) 27.l.11 3. (c) *Sobre rectas proporcionales son proporcionales, y al contrario.*

4 *Los inscriptos dentro de otro con angulo comun, tienen los planos, y lados paralelos, y al contrario.*

5. *El plano por el angulo comun, haze los segmentos semejantes, &c.*

DEMOSTRACION fig. 5. lib. 11.

1 *Los solidos semejantes à otro, lo son entre si.* Porque todos constan de angulos solidos iguales, de planos, y lados proporcionales (def. 9.) resuelvense en piramides semejantes, por la misma razon, que se resuelven los poligonos en triangulos semejantes. (4. l.6. n. 1.)

2. *Si AH. RC. son dos paralelepipedos semejantes, y los lados homologos AB. á BC. como BD. á BE. y FB. á BG. digo, que AH. á RC. tiene la razon triplicada de AB. á BC.* Sea P. à Q. como AB. à BC, y P. Q. X. Z. quatro rectas continuas proporcionales; conque la razon de P. à Z. serâ triplicada de P. â Q ù de AB. à BC. (def. 46. l.5.) Luego AH à RC. tiene la razon que P. à Z. Porq̃ si se juntan dos angulo solidos iguales en B. que los lados semejantes DB. BE. formen vna recta; (cons. 1. l.11. n.3.) y tambien otra formen FB. BG; por cortarse FG. DE. en B. estàn en vn plano HBR. (1. l. 11. n. 3.) continuados todos los planos, se añaden dos solidos HC. BM. y en el solido AN. por ser el plano HB. paralelo â la base CN. es la seccion su igual (4. l.11. n. 3.) Luego es AH. à BN. como AB. â BC. ò P. à Q. (4. l. 11. n. 4.) y por la misma razon, es BN. â BM. como BD. à BE: ò Q. à X. (4. l. 11. n. 4.) y BM. à BT. como FB. à BG. ò X. à Z. (4. l. 11. n. 4.) luego AH. à BT. ò RC. es como P. a Z. (1. l. 5. n. 2.3.) que es la razon triplicada de P. a Q. ò AB. a BC. (def. 46. lib. 5. (*De otra suerte.* AH. a RC. tienen la razon compuesta de las bases AD. à RO. y alturas BF. à BG. (5. l. 11. n. 4.) La base AD. â EC; ò RO. es como P. à X, razon duplicada de P. a Q. ò AB. à BC. (4. l.6. n.2.) BF. à BG. es como X. à Z. luego AH. à RC. es como P. à Z. compuesta de P. à X. y de X. à Z. de las bases, y alturas, y triplicada de P. â q. ò AB. à BC.

CO-

COROLARIOS.

Lo (a) mismo se concluye de los prismas; y de la misma forma de los cilindros; por ser iguales á dos paralelepipedos con igual base, y altura; (5. l. 11. n. 5.) lo mismo tambien se dize de las piramides triangulares, y conicas; que son el tercio de los prismas, y cilindros; (5. l. 11. n. 2.) Tambien se dize lo mismo de los solidos regulares, é irregulares, porque se resuelven en piramides semejantes n. 1. *(que cosa sea solido regular def. 32.) Tambien se dize lo mismo de las esferas, haziendo induccion de los solidos inscriptos, como de los planos inscriptos en el circulo.* Esto es, si el radio de vna esfera es de vn pie, y el de otra, de 2. la razon de vna à otra es como 1. á 8. que es la triplicada de 1. à 2. y assi dadas 4. continuas 1. 2. 4. 8. la esfera que tiene vn pie de semidiametro à la que tiene 2. tendrà la razon de 1. à 8. *Consectario.* Si Q. X. Z. son 4. rectas continuas proporcionales, el solido sobre P. al semejante sobre Q. tiene la razon que P. à Z. y al contrario. (a) 8. 12 l. 12.

3. Si P. Q. X. Z. son 4. proporcionales continuas, ó no continuas; y sobre P. Q. huviere dos solidos semejantes; y otros 2. sobre X. Z. digo, que los 4. son proporcionales. Porque tienen la razon triplicada de los lados homologos *n.* 2. Luego si la razon de P. à Q. es como la de X. à Z. la triplicada de P. à Q. serà como la triplicada de X. à Z. (1. l. 5. n. 2. y 3.) conque son los solidos proporcionales; y seràn continuos, si lo son las rectas. *Al contrario.* Si ellos son proporcionales, y dos a dos semejantes; seràn los lados homologos proporcionales; y si las razones triplicadas son iguales; tambien lo son las sencillas (1. lib. 5. num. 4.) *La demostracion de los numeros 4. y 5. es como en los planos (prop. 4. lib. 6. n. 5. y 6.) La aplicacion es facil, imaginandonos la figura plana como solido, porque si este se describiere, la multitud de lineas confundiria las figuras.*

DEMOSTRACION DEL NUMERO 2. CON ESTILO *Analytico.*

Supuesta la *fig.* 5. y supuestas las rectas continuas proporcionales P. Q. X. Z. correspondientes à los lados homologos, segun se previno en dicho *num.* 2. digo, que los dos paralelepipedos semejantes AH. y RC. tienen la razon triplicada de AB. à BC. ù de P. à Q.

Demostracion. Los paralelepipedos semejantes son los que se terminan con superficies, ò planos semejantes: (def. 9. l. 11.) Luego la base AD ∽ EC. pero los planos semejantes tienen la razon duplicada de sus lados homologos: (4. l. 6. n. 2.) luego AD. à EC. tendrà la razon duplicada de AB. à BC. ò la de P. à Q. pero P. à X. es razon duplicada de P. a Q. luego la razon de la base $\frac{AD.}{EC.}$ ∽ $\frac{P.}{X.}$ (1. l. 5. n. 2.) pero el paralelepipedo AH. se compone, no solo de la base AD. sino de la altura BF. y el paralelepipedo RC. no solo de la base EC. sino de la altura BG. y siendo, por suposicion BF. à BG. como X. à Z. serà el paralelepipedo AH. à RC. como P. à X. y X à Z. Luego AH. à RC. como P. à Z. compuesta de las bases, y alturas P. à X. y X. à Z. y triplicada de P. à Q. ù de AB. à BC. (def. 46. lib. 5.) Esta demostracion ha sido con el mismo methodo, que se demostrò el *num.* 4. de la proposicion antecedente.

De otra suerte.

Suponiendo pues como antes, las 4. *rectas continuas proporcionales P. Q. X. Z. ó* 1. 2. 4. 8. *semejantes a los lados homologos de los paralelepipedos semejantes AH. y RC. Cuyos lados del primero AB. BD. y BF. se llamen* a. d. f. *y los lados del segundo BC. BE. y BG. se llamen* c. e. g. *y que el lado* a, *al lado* c, *sea como* 2. *á* 4; *y el lado* d, *al lado* e, *sea como* 3. *á* 6; *y el lado* f. *al lado* g. *sea como* 5. *á* 10. *digo, que el paralelepipedo AH. á RC. tiene la misma razon que P. á Z.*

Demostracion. Es el producto solido adf ∽ AH. y el producto so-

ſolido ceg $\frown$ RC: (prob. 7. n. 4. Luego ſiendo AH $\underline{\frown}$ RC. ſerà tambien adf $\underline{\frown}$ ceg: (2. l. 9. n. 1.) pero los productos ſolidos ſemejantes tienen entre si la razon compueſta de las tres razones iguales de ſus lados homologos; y aſsi triplicada de ſus lados, q es $\frac{a}{c} \frown \frac{d}{e} \frown \frac{f}{g}$, ò $\frac{P}{Q} \frown \frac{Q}{X} \frown \frac{X}{Z}$ (def. 46. l. 5.) Luego $\frac{adf.}{ceg.} \frown \frac{a}{c} \times \frac{d}{e} \times \frac{f}{z}$ Luego el producto ſolido adf. à ſu ſemejante ceg. tiene la miſma razon que la compueſta de las tres razones iguales de ſus lados componentes (def. 11. l. 6.) que es la miſma que P.Q.X. à Q.X.Z. ſus ſemejantes; Pero $\frac{PQZ.}{QXZ.} \frown \frac{P.}{Z.}$ que es la razon triplicada de P. à Q. ù de a. à c. (def. 46. l. 5.) luego ſerà la razon de $\frac{adf.}{ceg.} \frown \frac{P.}{Z.}$ (1. l. 5. n. 2.) pero $\frac{AH.}{RC.} \frown \frac{adf.}{ceg.}$ luego $\frac{AH}{RC} \frown \frac{P.}{Z.}$ (1. l. 5. n. 2.) que es la razon triplicada de P. à Q ù de a. à c, ù de AB. à BC. de los lados homologos.

fin de los Libros 11. y 12.

GEO.

GEOMETRIA PRACTICA

Geometria practica, es ciencia practica de la quantidad continua, y la que enseña el modo de poner algo en execucion. Con la inteligencia de las especulaciones antecedentes, será facil la execucion de las siguientes practicas; pero el que no huviere estudiado los theoremas antecedentes, podrá exercitarse en las construcciones, omitiendo la demostracion. Para mas claridad se reduce todo este tratado a ocho especies de problemas, que comprehenden todos los que trae Euclides en sus elementos, y se añaden otros muchos no de menor importancia.

PROBLEMAS.

Prob. 1. De las rectas angulares, y paralelas.
Prob. 2. Division, y proporcion de las rectas.
Prob. 3. De los triangulos, y paralelogramos.
Prob. 4. Del circulo.
Prob. 5. De las figuras inscriptas, y circunscriptas.
Prob. 6. De la proporcion, suma, diferencia, y transformacion de las figuras.
Prob. 7. De las superficies, y solidos, y sus medidas.
Prob. 8. De los problemas no resueltos.

PROBLEMA I.

DE LAS RECTAS ANGULARES, Y PARALELAS.

1. (a) *Por un punto dado tirar una recta, que haga un angulo dado.*

(a) 23.1.1.

2. (b) *Dividir qualquier angulo en dos partes iguales con una recta.*

(b) 9.1.1.

3. *Hallar el valor de un angulo, y formarle de qualesquiera grados.*

(c) 31.1.1.

4. (c) *Tirar una paralela á otra recta, dada el punto, ó la distancia.*

Por

5 *Por vn punto dado fuera de vna recta, tirar otra, que haga vn angulo dado.*

6 (d) *De vn punto dado, tirar vna perpendicular, y con ella partir vna recta igualmente.* (d) 10. 11. 12. l. 1.

7 *Instrumento para los angulos rectos, vease de los angulos el prob. 4. pract. 2. y 6.* (d) 11. 12 l. 11.

PRACTICA I. fig. I.

1 *Dada la recta AB. en el punto A. se ha de formar el angulo CAB. igual à otro dado FDE.* Puesta la punta del compàs en D. con qualquiera abertura, formese el arco EF. y con la misma abertura, formese el arco BC. tomando por centro el punto dado A. Luego tomando con el compas el arco EF. se cortarà BC. su igual; y tirando la recta AC. serà el angulo CAB. igual à FDE. *Demostracion.* Porque los arcos CB. EF. son iguales, y medida de los angulos: seràn los angulos CAB. FDE. que tienen igual medida, iguales, (def. 11. l. 1.)

Practica 2. fig. 2.

2 *El angulo BAC. se ha de dividir igualmente.* Puesto el compas en A. descrivase qualquiera arco BC. y con la misma abertura desde los puntos B. y C. descrivanse dos arcos, que se cruzen en D. y la recta DA. partirà el angulo A. *Demostracion.* Porque los tres lados DB. BA. AD. son iguales à los tres DC. CA. AD. serà el angulo BAD. igual à CAD. (4. l. 1. n. 1.)

Practica 3. fig. 3.

3 *El valor de los angulos se hallarà facilmente con vn semicirculo de alaton, carton, ó turco, dividido en 180. grados BOC.* Sea el angulo dado BAD. puesto el centro del semicirculo en el punto A. y el radio sobre la recta AB. si la recta AD. corta 60. grados, serâ el angulo BAD. de 60. grados; y BAF. de 120. &c. Esto es, puesto el semicirculo, como se ha dicho, si la recta se tirare por los 60. grados, serà el angulo de 60. si por 45. serà de 45. &c. Este instrumento es muy vtil para la practica.

Practica 4. fig. 4.

4 *Dada AB. y fuera de ella el punto C. se ha de tirar CE. para-*

ralela á AB. por el punto dado C. Tirese desde C. qualquiera recta CB. que corte â BA. y del punto B. formese vn arco AH. y con la misma abertura, del punto C. formese el arco DE. cortandole igual al arco AH. y serà CE. paralela à AB. *Demostracion.* Porque los angulos alternos son iguales ABC. BCE. (2. l. 1. n. 2.) por ser iguales medidas AH. DE. (def. 10. l. 1.) *Dada AB. se ha de tirar su paralela GF. que tengan la distancia dada XZ:* Tomando en la recta AB. qualquier punto A. se descrivirà desde A. el arco G. con la distancia XZ. y del punto B. con la misma distancia, el arco F. y aplicando vna regla à dichos arcos, se tirarà la recta FG. que serà paralela â BA. *Demostracion.* Porque las distancias AG. BF. son iguales, y son la misma distancia XZ, (def. 25. l. 1.) *Quanto mas apartados se tomaren los puntos A. B.* saldrà la operacion mas exacta.

Practica 5. fig. 5.

5. *Dada la recta BA. y el punto D. fuera de la recta, se ha de tirar DA. que el angulo DAB. sea igual al dado G.* Tomese en la recta BA. qualquier punto C. y hagase el angulo BCE. igual à G (pract. 1.) y por el punto D. tirese DAF paralela â EC. (pract. 4.) y serà el angulo DAB. igual à G. *Demostracion.* Porque DAB. es igual à BCE. que es el mismo G. (def. 5. cor. 1. l. 1.)

Practica 6. fig. 6.

6. *Dado el punto C. en la recta AB: tirar vna perpendicular EC.* Tomense CA. CB. iguales, y de los puntos H. y B. con qualquier distancia, formense dos arcos, que se cruzen en E. Juntese EC. y serà la perpendicular, y los angulos ACD. ECB. rectos (def. 12. lib. 1.) *Demostracion.* Porque los lados EC. CA. AE. son iguales à EC. CB. BE: son los angulos ECA. ECB. iguales (4. l. 1. n. 1.) y rectos (def. 12. l. 1.) *Dado el punto D. fuera de la recta AB. tirar la perpendicular DG.* Puesto el compas en D. con qualquiera distancia, descrivase el arco BA. que corte a la recta AB. puesto el compas en A. y B. con la misma distancia, ò con qualquiera otra, se descrivirán dos arcos que se cruzen en G. y serà DG. la perpendicular. *Demostracion.* Por ser el triangulo ADB. isosceles, està dividido el angulo D. igualmente (5. l. 1. n. 6. y 7.) luego es

LG.

DG. perpendicular (prop. citada) *Si la recta AB. se ha de partir igualmente.* Puesto el compas en A. y B. se descrivan con qualquiera distancia dos arcos arriba, y dos abajo, que se cruzen en E. y G. y luego EG. serà perpendicular como antes, y los segmentos AC. CB. iguales (5. l. 1. n. 6. y 7.) *Si el punto B. està en el estremo de la linea; y se pide la perpendicular FB.* Puesto el compas en B. se tomarà qualquiera distancia BD. (pero que D. estè fuera de dicha linea AB.) y descrito el arco ABF. se tirarà ADF. y serà FB. perpendicular. *Demostracion.* Porque el angulo FBA. en el semicirculo ABF. es recto (3. l. 3. n. 6.) *Si el punto F. està fuera de AB. y se pide la perpendicular FB.* Tirese qualquiera recta FA. y dividida igualmente en D. se descrivirà de alli el semicirculo ABF. y la recta FB. serà la perpendicular. *Demostracion.* Porque el angulo FBA. en el semicirculo es recto (3. l. 3. n. 6.)

Practica 7. fig. 7.

7 *El instrumento mas acomodado para los angulos rectos, y lineas perpendiculares, es la esquadra ABC. de bronce, madera ó carton:* Porque formando vna vez el angulo recto ABC. aplicando el lado AB. à la linea, el lado CB. sirve de regla para tirar la perpendicular CB. y conviene, que el angulo interior, tambien sea recto, para muchas operaciones.

OTRA DEMOSTRACION DEL NVM. 1. CON ESTILO ANALYTICO.

Construccion, Juntense qualesquiera dos puntos de las lineas, que forman el angulo dado, formando vn triangulo CBA. y hagase de las tres lineas rectas AC. AB. y CB. el triangulo DFE. de suerte, que los dos lados DF. FE. sean iguales à AC. CB. y que el angulo comprehendido F. sea igual à C. y serà el angulo CAB $\sqcap$ FDE. *Demostracion.* Son en los triangulos CAB. y FDE. el lado AC $\sqcap$ DF. y CB $\sqcap$ FE. y el angulo C $\sqcap$ F. Luego todo el triangulo CAB $\sqcap$ FDE. (4. l. 1. n. 2.) Luego el angulo D $\sqcap$ A, dado.

PROBLEMA II.

DIVISION, Y PROPORCION DE LA RECTA.

(a) 3.10.l.1. 1. (a) *Dividir vna recta en qualesquiera partes.*

(b) 2 *Regla para la division igual.*

9.y 10, l.6. 3 (b) *Dividir vna recta en partes semejantes á otra.*

(c) 11.l.2. 4 (c) *Dada vna recta añadir otra, que la dada sea media entre la añadida, y la compuesta; y (d) dividir vna dada en*

(d) 30.l.6. *media, y estrema razon.*

(e) 13.l.6. Consectario. Dada la media, y la diferencia de las estremas, hallar las tres continuas proporcionales.

(f) 11.l6. 5. (e) *Dadas dos lineas, hallar la media proporcional.*

(g) 6 (f) *Dadas dos lineas, hallar la tercera proporcional.*

12.l.6. 7. (g) *Dadas tres lineas, hallar la quarta proporcional.*

PRACTICA I. fig. 1. del problema 2.

1 *Dividir la linea AB. en cinco, ó mas partes.* Tirese AC. perpendicular, (prob 1. pract. 6.) y tambien BD. Tomense en AC. infinita, qualesquiera cinco partes iguales, y las mismas en BD. y tirando las paraleles CD. OH. &c. serà OZ. la quinta parte de AB. *Demostracion.* Porque, como GO. es la quinta parte de CA. assi OZ. es la quinta parte de AB. (2. l. 6. n. 2.) luego quedarà AB. dividida en cinco partes. *Assi mismo qualquiera recta que se tire CB. quedarà dividida en otras cinco partes, y serà GZ. la quinta parte de CB.*

PRACTICA II. fig. 2.

2 *Regla general para qualquiera division.* Tomese vna regla AB. de bronce, ò box, ò marfil, dividida en 100. partes, ò en 1000. con el artificio precedente, y servirà para la division de qualquiera otra linea. Como si de la linea MN. se huvieren de tomar de 100. partes las 60. tirese CD. igual à AB. y del punto C. describase el arco DE. tomese la linea DE. igual â MN, tirese luego CE.

CE, y tomando de la regla AB. las 60. partes, se tomarà su igual CF. y descriviendo el arco FG. serà la recta FG. 60. partes de DE. ò MN. *Demostracion.* Porque como CF. es las 60. partes de CD. assi FG. es las 60. partes de DE. ò MN. (2. l. 6. n. 2.) Esta regla sirve en lugar de Pantometra.

PRACTICA III. *fig.* 3.

3 *La linea CD. està dividida en F. G. y se ha de dividir AB. en la misma razon.* Del punto C. tirese CE. que forme qualquier angulo, y sea igual à AB. Juntando DE. se tiraràn GO. FH. paralelas à DE. (prob. 1. pract. 4.) *Demostracion.* Por ser paralelas DE. GO. FH. quedarà CE. que es AB. divida como CD. (2. l. 6. n. 2.)

PRACTICA IV. *fig.* 4.

4 *Dada la recta AB. añadir otra GB. que AB. sea media entre GB. y ABG. compuesta.* Tirese AC. perpendicular à AB. y que sea su igual; y dividida AC. igualmente en E. (prob. 1. pract. 6) descrivase el circulo AGCD. y tiresele BED. y del punto B. el arco GF. y estarà concluydo. *Demostracion.* Porque siendo EAB. angulo recto, es BA. tangente (7. l. 3. n. 2. 3.) y media proporcional entre BG. BD. (6. l. 6. n. 4.) Luego porque DG. es igual à CA. que es AB: serà DG. media entre BG. y BD: luego DG. que es la dada AB. es media entre la añadida GB. y la compuesta BD. que es ABG. *Se supone, que la añadida sea menor que la dada.*

Dividir la recta AB. en media, y estrema razon. Tirese BED. como antes. Esto es, que DG. sea igual à AB. y de B. se descriva el arco GF. y quedarà AB. dividida en media, y estrema razon.

Demostracion. Porque AF. es diferencia entre BF. ò BG, y BA. y tambien BF. ò BG. es diferencia entre BD. y DG. ò AB. siendo BG. ò BF. BA. BD. tres continuas, tendràn las diferencias AF. FB. la misma razon (4. l. 5. n. 4.) luego AF. à FB. es como BF. à BA: luego BA. està dividida en F. en media, y estrema razon (def. 26. l. 6.)

Dada la media AB. y la diferencia de las estremas AC. hallar las estremas BG. BD. Forme AC. vn angulo recto con AB, y dividida igualmente en E. descrivase el circulo AGC. tirada la recta ta BED. seràn las extremas BG. BD. *Demostracion.* Porque son tres continuas GB. BA. BD. (6. l.6. n.4.5.) y DG. que es AC. es la diferencia de las extremas GB. y BD.

PRACTICA V. *fig.* 5.

5 *Hallar la media entre dos AB. EF.* continuese AB. que BC. y EF. sean iguales; y dividida AC. igualmente en O. (prob. 1. pract. 6.) del centro O. se descriva el semicirculo ADC, y tirada la perpendicular BD: serà media proporcional entre AB. y BC. que es EF. *Demostracion.* Porque BD. es perpendicular al diametro AC. es media entre AB. y BC. (6. l.6. n.2.)

Otro modo. Sean las dadadas AC. EF. y tomese CB. igual à EF. tirado el semicirculo ADC. y la perpendicular BD. se juntarà DC. y serà media entre AC. y CB. *Demostracion.* Porque el angulo del semicirculo ADC. es recto (3. l.3. n.6.) luego DC. es media entre BC. y CA. (3. l.6. n.3.)

PRACTICA. VI. *fig.* 1. y 6.

6 *De tres proporcionales, dada la menor BC. y la media BA. hallar la mayor BD.* Del punto B. descrivase el arco CF. tirese AO. perpendicular, y con qualquiera distancia AO. se descrivirà el circulo EAF. que corte el arco CF. y serà BFE. la tercera proporcional. *Demostracion.* Porque BC, que es BF. y BA. BE. son tres continuas proporcionales (6. l.6. n.4.5.) luego &c. *Si se dà la mayor DB.* se descrive el arco DE. y tirando BE. serâ la menor BF. (6. l.6. n.4. y 5.)

Otro modo. Sean dadas la menor GH. y la media HM. que formen qualquier angulo MHG. tirando MG. se harà el angulo HMN igual a MGH: y sera HN. la tercera, o la mayor. *Demostracion.* Porque son continuas GH. HM. HN. (3. l.6. n.2.) Si se da la mayor NH, y la media HM. tirada MN. se harà el angulo HMG. igual a MNH. y sera HG. la tercera menor. (3. l.6. n. 2)

PRACTICA VII. *fig.* 7.

7 *Dadas las AB. CB. BE. hallar la quarta proporcional ED.*

Por-

Formese qualquier angulo ABD. juntese CE. y tirese AD. paralela à CE. (prob. 1. pract. 4.) *Demostracion.* Porque son proporcionales, como BC. à BA. asi BE. à BD. que es la quarta mayor que se pidia (2. l. 6. n. 2.) Si fuere dada la mayor BD. y se busca la menor BE. se junta AD. y tirada CE. paralela a AD. sera BE. la quarta proporcional.

DEMOSTRACION DEL NVM. 4. CON ESTILO Analytico. fig. 8.

Este thorema es lo mismo, que dada una recta AB. cortarla en dos partes tales, que el rectangulo de toda la linea, y un segmento, sea igual al quadrado del otro segmento. Construcion. Formese el quadrado de la recta AB. (prob. 3. n. 6.) y cortese su adyacente AD. en dos partes iguales en E. (prob. 1. n. 6.) y tirese la recta EB. tambien de la EA. alargada, cortese EF ∽ EB. (prob. 2. n. 1.) conque siendo en el triangulo EAB. los dos lados EA. + AB. + q. EB. (5. l. 1. n. 4.) y EB ∽ EF ∽ EA. + AF. sera AB. + q. AF. (17. n. 1.) y asi cortandose de la AB. la AG ∽ AF. digo, que la AB. està cortada en G. como se pide.

Prevencion. Por el punto G. tirese la IH. paralela à la DF. (prob. 1. n. 4.) y por el punto F. la FH. paralela a la AB. (prob. 1. n. 4.) y serà el quadrado AH. de la recta AG. (def. 28. l. 1.) y el rectangulo DH. de la recta DFA. (def. 27. l. 1.) y asi lo que se ha de probar es, que el quadrado AH. hecho del segmento AG. es igual al rectangulo GC. hecho de toda la linea CB. ò AB. y del otro segmento GB.

Demostracion. Es el rectangulo de dfa. + eae ∽ efe ∽ ebe (2. l. 2. n. 4.) pero ebe ∽ eae + aba. (4. l. 1. n. 1.) Luego dfa. + eae ∽ eae. + aba. Luego dfa ∽ aba. ([illegible] l. 5. n. 1.) Pero (prevencion) dfh ∽ dfa. Luego dfh ∽ aba. ([illegible]) Luego dfh. − dag ∽ aba − dag. (15. [illegible]) Pero dfh − dag ∽ afh. item aba − dag ∽ gbc. Luego afh ∽ gbc. (2. l. 5. n. 1.) pero gbc ∽ abg. item afh ∽ aga. (def. 3. l. 2.) Luego abg ∽ aga. (2. l. 5. n. 1.) esto es, el rectangulo que se forma de toda la linea

ab,

ab. y del segmento bg. es igual al quadrado que se forma del otro segmento ag. Luego ab.. ag::ga..bg. (1. l. 6. n. 6) Luego la linea ab. se corta segun la estrema, y media razon ∴ ab. ag. gb.

PROBLEMA III.

DE LOS TRIANGULOS Y PARALELOGRAMOS.

(a) 1. l. 1. 1 (a) *Hazer vn triangulo equilatero de vna recta.*

2 *Hazer vn triangulo isoceles de dos rectas.*

(b) 22. l. 1. 3 *Hazer vn triangulo isoceles, que cada angulo sobre la base, sea duplo del vertical, ó vn tercio.*

(c) 18. l. 6. 4 *Hazer vn triangulo rectangulo de dos rectas.*

5 (b) *Hazer vn triangulo escaleno de tres rectas.*

6 *Hazer vn paralelogramo, dados los lados, y el angulo.*

7 (c) *Hazer vn triangulo, ó paralelogramo, ó qualquiera figura semejante.*

PRACTICA. I. fig. 1.

1 *Sobre la recta AB. se pide el triangulo equilatero ABC.* Con la distancia AB. desde A. y B. se forman dos arcos, que se cruzan en C. el triangulo ABC. será equilatero. *Demostracion.* Porque AB. BC. CA. tienen vna misma medida, y son iguales radios de iguales circulos.

PRACTICA II. fig. 2.

2 *De las rectas AB. DE. formar vn triangulo isosceles.* Del punto A. descrivase el arco BC. y tomando con el compas DE. se passará desde B. hasta C. y el triangulo BAC. será isoceles. *Demostracion.* Porque los lados AB. AC. son radios iguales; y BC. igual à DE. Luego, &c.

PRACTICA III. fig. 3.

3 *Formar vn triangulo isosceles, que cada vn angulo sobre la base, sea duplo del vertical, ó vn tercio.* Dada la recta BD. ò tomada albitrio, añadase DC. que sean continuas CD. DB. BC. (prob. 2. pract. 4) sobre BC. formese el triangulo isoceles, que BF. FC. sean iguales à BD. y tirada FD. será FBD. el triangulo primero,

Y

y BFC. el segundo. *Demonstracion.* Porque BD. ò BF. es media entre DC. y CB. es el angulo DFC. igual à B. (5. l. 6. n. 2.) y pues B. y G. son iguales, por ser BFC. Isoceles (5. l. 1. n. 1. 2.) serà DFC. igual à C. (2. l. 5. n. 3.) Luego porque el externo FDB. es igual à DFC. y à C. (3. l. 1. n. 4.) serà duplo de C. esto es de B. su igual : Luego FDB. BFD. que son iguales (5. l. 1. n. 1. 2.) son duplos de B. Luego si à BFD. le añadimos DFC. igual à B. sera todo BFC. triplo de B. y tambien de C. que es igual a B. (2. l. 5. n. 3.)

Practica 4. fig. 4.

4 *Formar vn triangulo rectangulo, dados los lados AC. DE.* Hagase CB. perpendicular à CA. (prob. 1. pract. 6. y sea) igual à DE: junta BA. y serà ABC. el triangulo. *Si se dà la base AB. y el lado DE.* dividida AB. igualmente en O. descrivase el semicirculo ACB. y tomando BC. igual à DE. Juntense BC. CA. el triangulo ABC. serà el rectangulo.

Demostracion. Porque el angulo ACB. en el semicirculo es recto (3. l. 3. n. 6.)

Practica 5. fig. 5.

5 *Dadas tres rectas AB. C. D. formar vn triangulo escaleno.* Desde el punto A. con la distancia C. descrivase el arco EG; luego del punto B. con la distancia D. se descriva el arco FG que cruzen en G. y serà ABG. el triangulo. *Demostracion.* Porque AG. BG. se han tomado iguales à C. y D. y BA. la misma dada : Luego todo se ajusta (14. p.) y es el triangulo escaleno.

Practica 6. fig. 6.

6 *Dada la recta GH. formar vn quadrado.* Porque deve tener el angulo recto ; tirese HM. perpendicular, (prob. 1. pract. 6.) igual à GH. y con la misma distancia, del punto M. y del punto G. se descrivan dos arcos, que se cruzen en O. tiradas OM. OG. serà OH. el quadrado que se busca.

Demostracion. Porque todos los lados son iguales a GH. y los angulos rectos. (def. 28. l. 1.) *El rhombo se descrive de la misma suerte, conque el angulo H. sea obliquo, igual al angulo dado (def. 29. l. 1.) El rectangulo oblongo se forma como se sigue.* Dadas AB. BC.

BC. hagase BC. perpendicular, (prob. 1. pract. 6.) y del punto A. con la distancia BC. se descriva vn arco; y del punto C. con la distancia AB. otro, que se cruzen en F, y tiradas FC. AF. será BF. el rectangulo (def. 27. l. 1.) *El rhomboide se forma de la misma suerte;* conque el angulo ABE. sea obliquo, igual al dado; y EA. será el rhomboide de AB. BE. (def. 30. l. 1.)

Practica 7. fig. 7.

Dado el triangulo ABE. se ha de formar otro semejante sobre vna recta igual á XZ. Tomese AC. igual á XZ. continuando, si fuere menester, la AB. (porque pudiera ser la XZ. menor, que AB.) y tirese CD. paralela á BE. (prob. 1. pract. 4.) será el triangulo ACD. semejante á ABE. *Demostracion.* Porque la paralela haze triangulos semejantes (2. l. 6. n. 2.) *Si fuere dado el trapecio BF.* Tirese el diametro AED. y CD. paralela como antes; y DH. paralela, a EF. continuando si fuere menester, el lado AFH. y será CH. el trapecio semejante a BF. *La demostracion*, nace de las paralelas (4. l. 6. n. 5.) y lo mismo es del paralelogramo; porque todas las figuras por las paralelas se resuelven en triangulos semejantes (4. l. 6. n. 1.) *Si la figura es ABEFO.* tirense las diagonales AED. AFH. y tomando AC. igual à la dada XZ. se hará CD. paralela à BE. y DH. a EF. y HG. a FO. *Demostracion.* Porque la figura ACDHG. es semejante à ABEFO. (4. l. 6. n. 1. 5.) y tiene el lado AC. igual al dado XZ.

DEMOSTRACION DEL NVMERO 7. CON ESTILO analytico.

Supuesta la construccion como antes, y de la figura del num. 7. que supongo ser pentagono. Digo, que el angulo OAB $\frown$ GAH (def. 9. l. 1.) y assi mismo el angulo FAE $\frown$ HAD. y el angulo EAB $\frown$ DAC. Luego el angulo OAB $\leftrightarrow$ FAE $\leftrightarrow$ EAB $\frown$ OAB (9. p.) assi mismo el angulo GAH $\leftrightarrow$ HAD $\leftrightarrow$ DAC $\frown$ GAC. Luego el angulo A. total, es comun á la figura constituyda sobre la linea AB. y á la figura constituyda sobre la linea AC. pero ambas (construccion) tienen las diagonales comunes, y los lados paralelos: Luego los angulos correspondientes seràn paralelos iguales (3. l. 11. n. 6.) y los lados proporcionales (4. l. 6. n. 6.) como el lado AO.. AG:: AF.. AH; pero AF.. AH:: AE. AD: Luego (1. l. 5. n. 1.) como AE.. AD:: AO.. AG: Pero como AE. BE:: AD.. CD. Y alternando (def. 33. l. 5.) como AE.. AD:: BE.. CD: Luego (1. l. 5. n. 1.) BE.. CD:: AO.. AG: (tambien se pueden probar los demas lados ser proporcionales por el paralelismo) Luego las figuras constituydas sobre las lineas AB. y AC. son semejantes (4. l. 6. n. 5.) que es lo que se avia de probar.

PROBLEMA. IV.

DEL CIRCULO.

1. (a) *Descrivir un circulo por dos, ó tres puntos; hallar el centro, y valor de un arco, y dividirle en dos partes iguales.* (a) 1. l. 3

2 (b) *Sobre una recta, ó dado el circulo, hallar un arco capaz de un angulo dado;* Consectario, *descrivir un angulo dado sobre una recta, que toque otra linea dada.* (b) 33. l. 3. (c) 34 l. 3

3 (c) *Cortar de un circulo un arco semejante á otro dado.* (c) 27. l. 3

4 (d) *De un punto dado tirar una tangente á un circulo dado, ó descrivir un circulo, que toque á una recta dada.*

5. *De un punto dado interior, ó exterior descrivir un circulo, que toque á otro.*

6 *Sobre una recta finita, descrivir un arco, que toque otra infinita dada.* Consectario, *sobre una recta formar el angulo mayor, que pueda tocar otra recta infinita.*

7. (e) *Por un punto dado tirar una recta dentro del circulo, igual á otra dada.* (e) 1. l. 1. y 1. l. 4.

Practica 1. fig. 1.

1. *Descrivir un circulo por dos puntos dados M. S.* abriendo el compas à la distancia, que ha de servir de radio, desde M. y S. se formaràn dos arcos, que se crucen en O. y serà el centro de donde se descrivirà el circulo AMS. *Descrivir un circulo por tres puntos A. B. C.* con qualquiera distancia desde A. y B. se

se descriven dos arcos, que se cruzen en E; y otros dos en G, ó Q. luego desde B. y C. se hazen otros dos en D. y F. con la misma, ó qualquiera otra distancia; tirando las rectas DFO. MOG. que se cruzen en O. será O. centro del circulo, y alargado el compas hasta C. se descrivirá el circulo CBARC. *Demostracion.* Porque DO. EO. son perpendiculares a las cuerdas CB. BA. y las parten por medio (prob. 1. pract. 6.) luego passan por el centro (2. l. 3. n. 2.) y assi el punto comun O. será el centro del circulo.

Si el arco dado es ABC. tomense tres qualesquiera puntos A. B. C. y se halla el centro O. como antes, y se acabará el circulo. *Si el arco dado,* es AB. y se ha de partir por medio, tirese la recta EG. como antes. *Demostracion.* Porque EG. es pendicular á BA. y la parte igualmente (prob. 1. pract. 6.) y parte tambien igualmente el arco (2. l. 3. n 2.)

Para el valor del arco MS. se hallará primero el centro O. y pues el arco MS. es medida del angulo MOS. (def. 10 l. 1.) se hallará el valor del angulo MOS. (prob 1. pract. 3.) que es el arco MS.

Practica 2. fig. 2.

Dada la recta AB describir el arco BNA. capaz del angulo CDE. Del centro D. descrivase qualquier arco CEF. y tomando EF. igual á CE. se juntaran CF. FD. Haganse los angulos ABG. GAD. iguales á CFD. (prob. 1. pract. 1.) y del concurso G. descrivase el arco ANB: digo, que tomando en la circunferencia qualquier punto N. será el angulo ANB. igual al angulo dado CDF. *Demostracion.* Porque el angulo ANB es la mitad del angulo AGB (3. l. 3. n. 1) luego es la mitad de CDF. ó igual á CDE. por ser el angulo G. igual á D. y ambos triangulos iguales, ó semejantes. (2. l. 6. n. 1.)

Dado el circulo BVH. de qualquier punto N. tirese qualquiera recta NB. y hagase el angulo BNA. igual á CDE: y será el arco ANB. capaz del angulo dado. *Demostracion.* Porque todos seran iguales á BNA. que es CDE. mitad de BGA. del centro, que es CDF. (3. l. 3. n. 1.)

Consectario. Sobre AB. describir el angulo BNA. igual á CDE. que toque otra recta dada MN. Descrito el arco ANB. capaz de el angulo CDE. si corta á la recta NM. en N. el angulo ANB. es

el

el que se pide. *Demostracion.* Porque ANB. toca à la recta MN. (def. 17. l. 3.) y es igual à CDE. porque se tomò igual. Lo mismo serà del angulo AMB. si se tiran las rectas AM. BM. Si el circulo no corta à la recta MN. serà impossible el caso. Lo mismo es de la curva PN.

Practica 3. fig. 3.

3 *Dado el circulo FGH. y el arco AB. se pide el arco GF. semejante à AB.* Busquense los centros C. O. sino estan dados (prob. 4. pract. 1.) tirada CF. se cortarà CE. igual à OB. y descrito el arco ED. se tomarà igual à BA. tirada CDF. seràn semejantes los arcos GF. DE. AB. *Demostracion.* Porque son medida de vn mismo angulo GCF. DCE. (def. 10. l. 1)

Practica 4. fig. 4.

4. *Dado el circulo BFG. y el punto B. en la circunferencia, se pide la tangente BA.* Tirese el radio CB. y su perpendicular BA. (prob. 1. pract. 6.) y serà la tangente (7. l. 3. n. 2.) *Si el punto dado es A. fuera del circulo.* Passe AC. por el centro C. y dividida CA. igualmente en D se descrivirà el circulo CBA. que corte à GFB. en B. y serà AB. la tangente. *Demostracion.* Porque en el semicirculo es el angulo CBA. recto (3. l. 3 n. 6.) Luego AB. respecto del otro circulo GFB. es tangente, por ser perpendicular al radio CB. (7. l. 3. n. 2) *Si la recta dada es AB. y en ella el punto B. ha de ser el contacto de vn circulo.* Tirese BG. perpendicular (prob. 1. pract. 6.) y tomando BC. igual al radio, que se desea, se descrivirà el circulo GFB. que tocarà à la recta BA. en B. (7. l. 3. n. 2.) *Si el centro C. està dado.* Tirese CB. perpendicular (prob. 1. pract. 6.) y con el radio CB. se descrivirà el circulo BFG. que tocarà à la recta BA. en B. (7. l. 3. n. 2.)

Practica 5. fig. 5.

5. *Dado el circulo MOH. y el punto A. fuera, se pide el circulo DGO. que toque à MOH.* Passe la recta AC. por el centro C. y con el radio AO. se descriva el circulo OGD. y tocarà à MOH. en O. *Si el punto dado es B.* Passe la recta BC. por el centro, y descrivase el circulo OLS. *Si el punto dado del contacto es O.* Passe la recta OC. por el centro, y los circulos DGO. y OLS. tocaran

ran a MOH. en O. La demostracion nace de los casos de la 26. l. 3. n. 2. 3. 4. y

Practica 6. fig. 6.

Dada la recta AB. y la infinita CD. pidese el arco BCEA. que toque à DC. Continuada AB. hasta cortar à CD. en D. hagase DC media entre BD. y BA (prob. 2. pract. 3.) y por los 3. puntos A. B. C. descrivase el circulo (prob. 4. pract. 1.) y tocarà à CD. en C. *Demostracion.* Porque siendo DC. media entre la secante AD. y su exterior segmento DB: serâ DC. tangente (6. l. 6. n. 4.)

Si la finita dada es EF. paralela à DC. infinita dada. Partase igualmente con el perpendiculo AGC: y por los tres puntos B. C. F. descrivase el circulo (prob. 4. pract. 1.) y tocarà à la recta CD. *Demostracion.* Porque el radio OC. es perpendicular à CD: Luego CD. es tangente (7. l. 3. n. 2.) *Consectario. Dada la recta AB. ò EF. finita, formar el angulo BCA. ò FCA. que se à el mayor de los que pueden tocar à la recta CD.* Descrivase el circulo como antes, el angulo ACB. serà el mayor que puede tocar à CD. *Demostracion.* Porque si el circulo fuera menor no tocara à la recta CD; si fuera mayor, la cortara; y el arco AFB. fuera de menos valor sobre la misma cuerda AB. (5. l. 6. n. 9.)

Practica 7. fig. 7.

Dado el circulo BDC. y el punto A. dentro, ò fuera, se ha de tirar ACB. que BC. sea igual à XZ. Tomando qualquier punto D. hagase DE. igual à XZ. y del centro O. descrivase el circulo GHR. que toque à DE. (prob. 4. pract. 4.) y del punto A. dentro, ò fuera del circulo, tirese ACB. que toque al circulo GHR. y serà BC. igual à la linea XZ. ò ED. su igual. *Demostracion.* Porque la distancias del centro OG. OH. son iguales radios; son tambien iguales cuerdas BC. DE. ò XZ. (2. l. 3. n. 4.)

DEMOSTRACION DEL NUMERO 4. CON ESTILO analytico (fig. 6.)

Construccion. Tirese la linea DCK. tangente del circulo en el pun-

mC. (prob. 4. n. 4.) y hagase en el punto C. el angulo MCE ⌒ D. dado (prob. 1. n. 3.) digo, que la recta CE. determina el segmento CFE. que recibe el angulo CFE ⌒ D. dado. Demostracion. Es la recta DM. tangente del circulo en el punto C. (construccion) y de dicho punto, se tirò la secante CE (7. l. 3. n. 5.) Luego el angulo MCE ⌒ CFE. (7. l. 3. n. 5.) pero MCE ⌒ D. (construccion) Luego CFE ⌒ D. angulo dado (1. l. 1. n. 1.) que es lo que se avia de probar.

PROBLEMA V.

DE LAS FIGURAS INSCRITTAS, Y CIRCUNSCRIPTAS.

1 (a) *Circunscrivir un circulo à un triangulo; (b) è inscribir un triangulo en un circulo.* (a) 5. l. 4. (c) 4. l. 4.

2 (c) *Inscrivir un circulo en un triangulo; (d) circunscrivir un triangulo à un circulo.* (d) 3. l. 4. (e) 14. l. 4.

3 (e) *Inscrivir un exagono, y un triangulo regular en un circulo (f) y las figuras de doblados lados.* (f) 6. l. 4. (g)

4 (g) *Inscrivir un quadrado, y octagono &c.* 6. l. 4. (h)

5 (h) *Inscrivir un pentagono; (i) quindenagono, y las de doblados lados.* 10. l. 4 (i) 15 l. 4.

6 (k) *Circunscrivir al circulo las sobredichas figuras regulares.* (k) 7. y 12 l. 4.

(l) *Y al contrario; è (m) inscrivir el circulo en ellas.* (l) 9. 13. l. 4.

7 *Dividir el circulo en 360. grados.* (m) 8. 13. l. 4.

Practica. fig. 1.

1 *Dado el triangulo ABC. circunscrivirle un circulo.* Descrivase por los tres puntos A. B. C. el circulo (prob. 4. pract. 1.) y quedarà circunscripto al triangulo (def. 23. l. 3.)

2 *Dado el circulo GDE. inscrevir el triangulo &c.* Circunscrivase el circulo ABC. como antes, y tomando qualquier punto G. cortense los arcos GD. DE. semejantes à AB. BC: (prob 4. pract. 2.) y serà DEG. el triangulo inscripto, equiangulo à BCA.

De-

Demostracion. Porque los arcos GD. DE. EG. semejantes à AB. BC. CA. son los angulos opuestos iguales E. C. y D. B. y G. A. (3. l. 3. n. 4.)

Practica 2. fig. 2.

Y En el triangulo ABC. se ha de inscrivir el circulo EGF. Partan CO. BO. igualmente los angulos C. y B. (prob. 1. pract. 2.) Sea OF. perpenpicular à BC. y cortese BG. igual à BF; y CE. igual à CF. y con el radio OF. descrivase el circulo FEG *Demostracion.* Porque EC. CO. son iguales à FC. CO. y comprehenden iguales angulos ECO. OCF. serà OE. igual à OF. y el angulo E. recto, como lo es tambien F. (4. l. 1. n. 1.) y assi mismo OG. perpendicular, è igual à OF. Luego el circulo passa por E. y G. y por ser los angulos E. G. F. rectos toca à los lados, (7. l. 3. n. 1.) y està inscripto en el triangulo (defi. 23. l. 3.)

El triangulo ABC. se ha de circunscrivir al circulo PMN. inscrivase el circulo EGF. como antes, y tomando qualquier punto P. en el circulo PMN. haganse los arcos PM. PN. semejantes à GE. GF. y tirados los radios HP. HM. HN. tirense perpendiculares SMZ. ZNR. RPS. y tocarà el triangulo SRZ. al circulo PMN. (7. l. 3. n. 1.) y serà semejante ABC. *Demostracion* Porque los quatro angulos M. H. N. Z. son iguales à E. O. F. C. (3. l. 1. n. 6.) pues aviendose hecho M. H. N iguales à E. O. F. serà Z. igual a C. (3. l, 1. n, 7.) assi mismo S. igual à A; y R. à B. Luego siendo equiangulos, y semejantes ZSR. CAB. se circunscriviò el triangulo ZSR. al circulo PMN.

Practica 3. fig. 5.

En el circulo ADF. se ha de inscrivir un exagono, ò triangulo regular. Con el mismo radio CA. tomense las distancias AB. BD. DE. EF. FG. y fenecerà en GA.

Demostracion. Porque el triangulo ABC. es equilatero, son sus tres angulos iguales (15. l. 1. n. 5.) Luego el angulo ACB. es de 60. gra-

grados, que es vn tercio de dos rectos, ò del femicirculo 180. y vn sexto de todo el circulo, y afsi la media del arco AB. es la sexta parte del circulo (def. 10. l. 1.) y los angulos A. B. D. son todos iguales, y constan de 120. grados cada vno, ò dos sextas partes del circulo. *El triangulo BGE. es equilatero.* Porque los arcos BG. GE. EB. son iguales de dos sextas partes: Luego tambien las cuerdas (2. l. 3. n. 1.) Si todos los arcos como AB. se dividen igualmente (4. p. 1.) se descrivirà el dodezagono, y afsi infinitamente las figuras de doblados lados.

Practica 4. fig. 4.

Inscrivir en vn circulo vn quadrado. Sea qualquier diametro CD. y AEB. su perpendicular, junta AD. DB. BC. CA. y se formarà el quadrado propuesto. *Demostracion.* Porque siendo los 4. angulos E. rectos son los 4. arcos iguales (def. 10. l. 1.) luego las quatro cuerdas AD. DB. BC. CA. son iguales (2. l. 3. n. 1.) y los 4. angulos A. D. B. C. que insisten en los semicirculos, son rectos (3. l. 3. n. 6.) luego CADB. es quadrado (def. 28. l. 1.) *Para el octagono*, se partiràn igualmente los arcos en F. G. &c. (prob. 4. pract. 1.) y quedarà el circulo dividido en 8. partes: Luego, juntando las cuerdas AF. FD. &c. se formarà el octagono.

Practica 5. fig. 5.

Inscrivir el pentagono. Tirando qualquier diametro BDE. formese el triangulo isosceles BDF. que los angulos D. y F. sean duplos de FBD. (prob. 3. pract. 3.) continuada DFG. es el arco BG. la quinta parte del circulo, y tomando sus iguales GH. HO. LO. se descrive el pentagono. *Demostracion.* Porque los tres angulos D. F. B. son dos rectos (3. l. 1. n. 1.) y D. F. son iguales, y cada vno duplo de B. serà B. vn quinto de dos rectos, y del semicirculo: Luego D. ò su medida GB. es vn quinto de todo el circulo, que es 72. grados. *Inscrivir el dezagono.* Partase HO. en E. igualmente, y serà HE. la decima parte del circulo; *y partiendo igualmente el arco HE. serà el veintagono* (prob. 4. pract. 1.) ò tomando el quadrante BN. de 90. grados, y siendo BL. de 72. quedarà LN. de 18. que es la vigesima parte del circulo. *Inscrivir el treintagono.* Tomese BX. la sexta parte del circulo, ò 60. grados (prob. 5. pract. 3.) quitado de BL. 72. queda XL. 12. que es la trigesima parte de 360. y de todo el circulo, y tomando LP. igual â LX. de 12. grados queda NP. de 6. grad. la sexagesima parte del circulo: y el arco XP. de 24. grados, es el quinzagono, y la decimaquinta parte del circulo.

Practica 6. fig. 6.

6 Dado el circulo ABCD. circunscrivir las sobredichas figuras. Inscrivase la figura, que se ha de circunscrivir, (prob. 5. pract. 3.4 5.) y tirando a los angulos los radios EA. EB &c. haganse perpendiculares LAF. FBG. &c. y quedarà circunscripta la figura regular.

Dada la dicha figura ABCD. que se ha inscripto, si á esta se ha de circunscrivir el circulo, obrese como se sigue. Partanse igualmente los lados AD. DC. con las perpendiculares OE. ZE. y con la distancia ED. se circunscrivirà el circulo DABC.

Si el circulo se ha de inscrivir en la figura FGHL. Partanse igualmente los lados LF. LH. con los perpendiculos AE. DE. (prob. 1. pract 6.) y con el radio EA. se inscrivirâ el circulo ABCD. La misma practica trahe a los ojos la demostracion, pues el perpendiculo AE. es el radio del circulo, que toca interiormente los lados del quadrado circunscripto (def. 23. l. 3.)

Practica 7. fig. 7.

Dividir el circulo en 360. partes, ó grados. Sobre la recta AB. descrivase el semicirculo AoB. y con la misma abertura de el compas, se tomarà Ad; y B6. de 60. grad. y desde d. y 6. con la misma distancia se descrivan dos arcos, que se cruzen en D. y serà DC. perpendicular, y Ao. quadrante; y con el mismo radio de A. y o. se descrivan dos arcos, que se cruzen en n. y Cn. partirâ el quadrante Ao. igualmente, y serà Ah. y ho. de 45. grad. y tomando con el mismo radio las distancias or. o3. quedara todo el semicirculo dividido en seis partes iguales, que cada vna es 30. grad. y dividiendo cada vna de estas partes en tres, por tentacion, quedarà el quadrante Bo. dividido en nueve partes, que cada vna vale le 10. grad. y pues ho. es 45. y do. es 30. será dh. 15. luego tomando esta distancia, y passandola de B. entre 1. y 2. tendrémos los cinco grados; con que todo el quadrante Bo. puede quedar dividido de 5. en 5. grados: Luego se halla el lado del pentagono, (prob. 5. pract. 5.) y sea AB. 72. grados, quinta parte de todo el circulo, y quedará bo. de 18; y pues do. es de 30. quedará db. de 12. y partiendo bo. igualmente en c. será co. de 9. grados; y pues dh. y rh. son de 15. Si quitamos dx. y rz. iguales á db. que es 12. quedará hx. y hz. de 3. grad. y zx de 6. y quitando co. 9. grad. de o8. que es 10. quedará 1. grad. que quitado de los 5. quedará 4. grad. y quitando bo. 18. de o7. que es 20. quedará 2. grad. con que teniendo ya 1. 2. 3. 4. y 5. grad. se acabará de dividir todo el quadrante Bo. en 90. grad. y todo el semicirculo en 180.

Vn semicirculo de bronce, talco, ó carton, bien dividido, es de suma importancia para formar los angulos, y hallar su valor.

DEMOSTRACION DE EL NVMER. 1. CON ESTILO *Analytico.*

Construccion. En el circulo DGE. tirese la linea LM. que sea tangente en el punto D. (prob. 4. n. 4.) y en el contacto D. hagase el angulo LDG = B; y el angulo MDE = A. (prob. 1. n. 3.) y tirese la recta GE. digo, que el triangulo GDE. inscripto en el circulo dado, es equiangulo con el triangulo ABC.

Demostracion. Es el angulo LDG = E. (7. l. 3. n. 5.) pero el angulo LDG = B. *Construccion.* Luego E = B. (11. p.) Por la misma razon, es el angulo MDE = G; y G = A: Luego el angulo D = C: (3. l. 1. n. 7.) Luego se inscrivió en el circulo el triangulo DGE. equiangulo á ABC.

PROBLEMA VI.

DE LA PROPORCION, SVMA, DIFERENCIA, Y *transformacion de las figuras.*

I *Aumentar, ó disminuir las figuras semejantes en qualquiera* *proporcion; y hallar la proporcion de las semejantes.*

2 Hallar la suma, ó diferencia de qualesquiera figuras semejantes.

3 Formar un anillo, o marco regular, igual á qualquiera figura de la misma especie, y al contrario.

4 Transformar un triangulo en otro, ó un paralelogramo en otro dado un angulo, y la base.

(a) 42.44 l. 1. *5 (a) Transformar un triangulo en un paralelogramo, dado un angulo, y la base, y al contrario.*

(b) 45. l. 1. *6 (b) Transformar qualquiera figura en un paralelogramo, dado el angulo, y la base.*

(c) 25. l. 6 *7 (c) Transformar qualquiera figura en otra especie dada, ó en un quadrado, y hallar su proporcion.*

Practica 1. fig. 1.

1 *Sobre la recta AB. está qualquiera figura ABF. pidese otra menor, que la mayor á la menor tenga la razon, que G. a H.* Entre G. y H. hallese la media proporcional M. (prob. 2. pract. 5.) conocidas las tres G. M. y AB. hallese la quarta proporcional BC. (prob. 2. pract. 7.) Luego sobre BC. descrivase la figura CBE. semejante à la dada ABF. (prob. 3. pract. 7.) y será CBE. la que se pide.

Demostracion. La figura ABF. à CBE. tiene duplicada la razon de AB. a CB. (4. l. 6. n. 2.) Esto es de G. a M. La razon de G. à H. es tambien duplicada de G. â M. (def. 45. l. 5.) Luego la razon de ABF. à CBE. es como la de G. à H. (1. l. 5. n. 2.) exæquo (*Si la figura CBE. se ha de aumentar en razon de H. á G.* Hallada la media M. será como H à M. asi BC. a BA.) prob. 2. pract. 7. (y la figura DAF. será la que se pide. La demostracion es la misma. La razon de las figuras semejantes ABF. à CBE. se hallará, si conocidas AB. CB. se halla la tercera proporcional DB. (prob. 2. pract. 6.) *Demostracion.* Porque AB. à DB. tiene la razon duplicada de AB. à CB. (def. 45. l. 5.) y ABF. à CBE. tambien es duplicada de AB. à CB. (4. l. 6. n. 2.) Luego ABF. à CBE. es como AB. à BD. (1. l. 5. n. 2.)

Prac-

Practica 2. fig. 2.

2 *Consideren se descritas sobre las rectas* a. c. m. n. *qualesquiera figuras semejantes, circulos, ó triangulos, ó poligonos regulares, ó irregulares; pidese la suma de los quatro.* Formese el triangulo rectangulo; que CA. AB. sean iguales à *a. y c.* (prob. 1. pract. *6.*) la figura sobre BC. serà la suma de las figuras descritas sobre CA. y AB. que son las rectas *a. y c.* (4. l. *6.* n. 4.) y tirando CD. perpendicular a CB. (prob. 1. pract. *6.*) igual a la recta *m.* serà BD. suma de DC. y CB. esto es de *a. c. m.* y si DE. se toma igual â *n.* y se tira perpendicular â BD. serà BE. suma de BD. y BE. Esto es de *a. c. m. n.* &c. (4. l. *6.* n. 4.)

Hallar la diferencia de las figuras, que se pueden descrivir sobre BC, y la recta a. Si sobre la mayor CB. se haze vn semicirculo CAB: tomando CA. igual à *a.* serà AB. la diferencia. *Demostracion.* Por que siendo recto el angulo A. del semicirculo (3. l. 3. n. *6.*) la figura de BC. es igual à la de CA. y AB. (4 l. *6.* n. 4.) luego la de BC. excede à la de CA. en toda la de AB. que es la diferencia.

Hallar lo que la figura de la recta r. *excede á las de* a. *y* c. Primero se sumaràn *a.* y *c.* como antes, y serà BC. la suma: y sobre la base BD. igual â *r.* se formarà el triangulo rectangulo DBC. (prob. 3. pract. 4.) y serà CD. el excesso en que *r.* excede à *c.* y *a.* &c. la demostracion es la misma.

Practica 3. fig. 3.

3 *Dado el circulo menor GZX. y el mayor AFE. pidese el circulo intermedio* arn. *que el anillo, ó espacio comprehendido entre los dos AFE.* arn. *sea igual al circulo GZX.* Tomese la diferencia entre los dos circulos AEF. y GZX. que es la de sus radios OA. OG. (prob. *6.* pract. 2.) y se halla Oa. que se pide. *Demostracion.* Porque siendo el circulo del radio OA. igual al de los radios OG. Oa. (4. l. *6.* n. 4.) serà el circulo GZX. la diferencia entre los circulos AEF. arn. (prob. *6.* pract. 2.) y pues el anillo entre los dos circulos AFE. arn. es tambien diferencia de los mismos dos circulos, porque es lo que excede AFE. à arn: Luego serà dicho anillo igual al circulo dado GZX. (11. p.) *Si se dá el circulo GZX.*

y el interior del anillo arn; y se busca el exterior AFE. Hallase la suma de los circulos OG. Oa. (prob. 6. pract. 2.) que serà OA: y el anillo comprehendido de los circulos AFE. arn. serà igual al circulo GZX. Se demuestra como antes. *Dado el anillo entre AFE. arn. hallar el circulo GZX. igual al anillo.* Tomese la diferencia entre los circulos OA. Oa. (prob. 6. pract. 2.) y se hallarà el radio OG. del circulo GZX. igual al anillo dado. Se demuestra como antes. *Lo mismo, que del anillo, se dize del marco entre los exagonos AFE. arn. respecto del exagono GZX, y lo mismo es de qualesquiera figuras regulares que se pueden inscrivir en los circulos.*

Practica 4. fig. 4.

4 *El triangulo dado MNS. se ha de transformar en RMP. sobre la base MR. que el angulo sobre la base sea igual al angulo G.* Hagase el angulo RMP. igual â G. (prob. 1. pract. 1.) y SQ. paralela MN. (prob. 1. pract. 1.) que cortarà à MP. en O. juntese la oculta RO. y hagase NP. paralela à RO. el triangulo MRP. es igual al dado MNS. y tiene la base, y angulo dado. *Demostracion.* Por ser paralelas RO. NP. son proporcionales RM. à MO. como NM. à MP. *n.* 1. Luego porque los triangulos PMR. OMN. tienen los lados reciprocos, esto es, los medios en el triangulo MNO. y los estremos en el de MRP. y el angulo OMN. comun, seràn estos iguales, (1. l. 6. n. 5.) luego porque MON. es igual à MSN. sobre vna misma base, y entre dos paralelas (8. l. 1. n. 3.) serâ MPR. igual à MSN. (11. p.)

Dado el triangulo MRP. se ha de transformar en MSN. sobre la base MN. y el angulo opuesto à la base ha de ser igual à L. Tirese NP. y hagase RO. paralela à NP; y OSQ. paralela à MN. Luego sobre MN. descrivase vn arco capaz del angulo L. (prob. 4. pract. 2.) que cortarâ â OQ. en S. y serà el triangulo MSN. el que se pide. Se advierte, que si el circulo no corta â la paralela OQ. serâ el caso imposible. *Demostracion.* El triangulo MNO. es igual à MPR. como antes (1. l. 6. n. 5.) MON. es igual a MSN. (8. l. 1. n. 3.) luego MSN. es igual à MPR. (11. p.) y tiene se el angulo S. igual a L. (3. l. 3. n. 3.) opuesto a la base dada MN. como se desseava.

Transformar el paralelogramo MX. en NS. la practica es la misma, por ser duplos de los triangulos (8. l. 1. n. 2.) pero en el segundo caso, el angulo S. opuesto à la base, es el que haze la diagonal NS. con el lado SM. y no el que haze la paralela SQ. La demostracion es la misma.

Practica 5. fig. 5.

5. *Dado el triangulo ABE. y la base AC. y el angulo CAD. se pide el paralelogramo AG. igual al triangulo ABE.* Formese el triangulo ADC. igual à ABE. (prob. 6. pract. 4.) y partiendo igualmente al lado AD. en F. se hagan FG. CG. paralelas â CA. AF. y serà AG. el paralelogramo, que se pide. *Demostracion.* Porque AF. es la mitad de AD. sera el paralelogramo AG. igual al triangulo ADC. (8. l. 1. n. 6.) esto es â BEA. que se deseava.

Dado el paralelogramo AG. la base AB. y el angulo BAE. ó AEB. se pide el triangulo ABE. igual al paralelogramo AG. Continuase FD. igual à FA. y sera DCA. igual a GA. (8. l. 1. n. 6.) hagase despues el triangulo AEB. con la base, y angulo dado igual a DCA. (prob. 6. pract. 4.) y sera tambien igual à GA. (11. p.)

Practica 6. fig. 6.

Transformar el rectilineo ABCDE. en vn paralelogramo GS; y que la base dada sea GH. y el angulo dado H. Dividase el rectilineo en los triangulos EAD. ADC. ACB. y sobre GH. hagase el paralelogramo GN. igual al triangulo AED; sobre MN. el paralelogramo MQ. igual à DCA; y sobre PQ. el paralelogramo PS. igual à CBA. (prob. 6. pract. 4.) y quedarà todo echo segun se pidia. *Demostracion.* Porque todo el paralelogramo GS. serà igual a todos los triangulos del rectilineo, que le componen; luego serà igual al rectilineo. (9. P.)

Prac-

Practica 7. fig. 7.

7 *Dados los rectilineos Z. y X. pidese uno semejante á X. que sea igual á Z.* Tomando qualquiera recta FC. y qualquier angulo C. hagase el paralelogramo CB. igual â Z. y sobre BD. el paralelogramo BE. igual à X. (prob. 6. pract. 6.) tomese nr. quarta proporcional, como ED. â DC. assi NM. à nr. (prob. 2. pract. 7.) y hallada la media ns. que sean tres continuas nr ns. nm. (prob. 2. pract. 5.) se descrivirà sobre ns. vn rectilineo semejante â X. (prob. 3. pract. 7.) que sera igual à Z. como se pide. *Demostracion.* X. â Z. es como EB. à BC. sus iguales. EB. à BC. es como ED. à DC. (1. l. 6. n. 1.) luego X. à Z. es como ED. â DC; (1. l. 5. n. 1.) y por ser tres continuas nm. ns. nr. es X. à x. (formada de la media) como nm. â nr. (4. l. 6. n. 2.) y pues nm. â nr. se hizo como ED. à DC. esto es como X. â Z. Luego x. y z. son iguales entre si. (2. l. 5. n. 1.) y x. semejante à X. &c.

Reducir el rectilineo Z. á vn quadrado, se puede hazer de la misma suerte; pero mas facil sera tomar qualquiera recta FC. y el angulo C. recto, y hazer el rectangulo BC. igual à Z. (prob. 6. pract. 6) y hallando entre CD. DB. la media proporcional h. (2. p. 5.) el quadrado de la media h. sera igual al rectangulo de las estremas BD. DC. (1. l. 6. n. 6.) y por consiguiente el rectilineo Z. que es igual al rectangulo BC. de las estremas.

Hallar la razon de X. á Z. Si se forma el rectangulo FD. igual à Z. y sobre BD. el rectangulo BE. igual â X. (6. p. 6.) sera X. *á* Z. como EB. *á* BC. esto es como ED. *á* DC. por tener vna misma altura (1. l. 6. n. 1.)

DEMOSTRACION DEL NVMERO 5. CON ESTILO *analytico fig. 8.*

Sobre vna recta dada, A ——, construyr vn paralelogramo igual al triangulo, BCD. dado, y que tenga vn angulo igual á otro angulo rectilineo V dado.

La

La recta dada puede ſer igual, ò mayor, ò menor de la ſemibaſe del triangulo.

Conſtruccion. Caſo 1. partaſe la baſe BD. en dos partes iguales en el punto F; (prob. 1. n. 6.) y tirando la FC. tireſe tambien la CK. paralela a la baſe BO. (prob. 1. n. 4) y haziendo el angulo EFD. ∽ Z. (prob. 1. n. 3.) tireſe la DH. paralela a la FE. (prob. 1. n. 4.) digo, que el paralelogramo FH. que tiene el angulo EFD. igual al dado, y el que ſe pide.

Demoſtracion. Es el paralelogramo FH. al triangulo CFD. como 2. a 1; (prop. 8. l. 1. n. 2.) item, es el triangulo BCD. al triangulo CFD. como 2. a 1. (prop. 8. l. 1. n. 5.) luego el paralelogramo FH. es igual al triangulo BCD. (11. p.) Luego ſi la recta dada *A.* es igual a la ſemibaſe FD. el paralelogramo FH. ſobre ella es el que ſe pide.

Caſo 2. Conſtruccion. Si la recta dada *A.* es mas corta, ò mayor de la ſemibaſe FD. alargueſe, ò continueſe EH. haſta que ſea HK ∽ A; y por el punto D. tireſe la DK. prolongada, haſta que encuentre con la EF. alargada, en el punto M. y tirando las paralelas MI. KI. alargueſe la FD. haſta O. y la HD. haſta L. (prob. 1. n. 4.)

Demoſtraciõ. Es el cõplemento LO ∽ FH. (4. l. 6. n. 7.) Pero FH. es igual al triangulo BCD. *caſo* 1. luego LO. es igual al triãgulo BCD; (11. p.) pero el angulo LDO ∽ FDH. (1. l. 1. n. 5.) Luego el angulo DLI ∽ EFD ∽ Z. (def. 32. l. 1.) Pero tambien la linea DO ∽ Hk ∽ A. (caſo 1.) Luego aunque la recta dada no ſea igual a la ſemibaſe del triangulo, ſe puede en ella conſtituyr vn paralelogramo igual al triangulo.

Importa mucho que el eſtudioſo ſe aplique a entender bien eſte problema, porque de ſu inteligencia, nace el que ſe ſepa reducir qualquiera figura a paralelogramo, haviendoſe antes reducida a triangulos, que ſiempre ſon dos menos que los lados (4. l. 11.) y hallar la razon que tienen entre sì las figuras (prob. 6. n. 7.)

PROBLEMA VII.

DE LAS SUPERFICIES, Y SOLIDEZ.

1 Hallar la superficie de vn paralelogramo, y triangulo.

2. Hallar todas las superficies planas rectilineas de todas las figuras, y cuerpos.

3. Hallar la altura de los solidos.

4. Hallar la solidez de los paralelepipedos, y prismas.

5. Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares.

6 Descrivir vn solido semejante à otro sobre vn lado dado; y hallar la razon de los solidos semejantes.

7. Transformar vn paralelepipedo, prisma, ó piramide en otro, dada su base rectilinea, ó su altura.

PRACTICA 1. fig. 1.

1 El producto de la vase, y altura es la superficie del paralelogramo. *Exemplo* 1. Si el paralelogramo es rectangulo como EB: y la vase AB. tiene 3. pies y el lado AE. tiene 5. se multiplicarà vno por otro, y el producto serà 15. pies quadrados (def. 6. l. 1.) que es toda la superficie de EB. como se ve en el rectangulo Z. que se compone de 15. quadrados.

Exemplo 2. Si el paralelogramo no es rectangulo, como AD. se tira la perpendicular AE. al lado opuesto, y si hallo que AB. tiene 3. pies, y AE. 5. multiplicando el lado por el perpendiculo que es 3. por 5. salen 15. pies quadrados la superficie de AD. (def. 38. l. 1.) Porque considerando BF. tambien perpendicular, serà el rectangulo BE. igual al romboyde AD. (8. l. 1. n. 3.)

El producto de la base, por la mitad del altura, ó el producto del altura, y mitad de la base, es la superficie del triangulo, por ser el triangulo medio paralelogramo (8. l. 1. n. 6.) *Exemplo* 1. Si el triangulo PRO. es rectangulo, serà PR. perpendicular, y la altura del triangulo; pues si PR. es de 4. pies, y la base RO. de 9. mul-

multiplicando 9. pies por 2. que es la mitad de la altura, sale la superficie 18. pies quadrados; (def. 6. l. 1.) tambien se multiplicò la altura 4. por la mitad de la vase, que es 4. y medio, sale 18. como antes.

Exemplo 2. En el triangulo HLP. el perpendiculo PR. cae dentro, y es 4. pies; su mitad 2. y HL. que es la vase 5. multiplicando 5. por 2. sale la superficie 10. pies quadrados (def. 6. l. 1.) *Exemplo* 3. en el triangulo LOP. cae el perpendiculo PR. fuera del triangulo en la base OL. continuada hasta R; la vase OL. es de 6. pies, el perpendiculo 4. su mitad 2. multiplicando 6. por 2. sale la superficie 12. pies quadrados (def. 6. l. 1.)

Practica. 2. fig. 2.

1 *Hallar la superficie de vn rectilineo.* Qualquier rectilineo ABCDEF. se resuelve en triangulos, (prob. 6. pract. 6.) si se halla la superficie de todos los triangulos (7. p. 1.) se sabrà la superficie de toda la figura. Lo mismo es en todas las superficies planas rectilineas de los cuerpos.

Hallar la superficie de vn solido. Hallese cada superficie como antes, y la suma de todas, serà la superficie del solido. *Hallase la superficie de las figuras regulares*, que se han de considerar inscritas, multiplicando la circunferencia, perimetro, ò suma de todos los lados, que todo es vno, por la mitad del perpendiculo del centro, ò vno de los lados, sale la superficie. Lo mismo es si se multiplica todo el perpendiculo por la mitad del perimetro, ò suma de los lados. (cor. def. 25. l. 3.)

1 *Consectario.* Considerando al circulo como poligono de infinitos lados, y al radio por su perpendiculo, si se multiplica este por la mitad de la circunferencia, ò perimetro, el producto, ò rectangulo serà la superficie, ò area de todo el circulo. El modo de hallar la circunferencia se dirà despues. (prob. 8. pract. 4.)

2 *La superficie del circulo*, es el producto del radio, en la mitad de la circunferencia; como si el radio fuesse 7 pies, la mitad de la circunferencia 22. multiplicando 22. por 7. salen 154. pies quadrados de la superficie del circulo.

3 *La superficie convexa del cilindro recto*, es el producto del lado en la circunferencia del circulo, que es su base; y añadidas las dos superficies del circulo superior, y inferior, serà toda la superficie del cilindro, (fig. 4. prob. 8.) Si la base tiene de diametro 14 pies, serà su circunferencia 44. (consect. 2.) multiplicada por la altura 10. pies, serà la superficie convexa 440. pies quadrados, y añadidas las dos superficies circulares, de 154. (consect. 2.) serà toda la superficie convexa 748. pies quadrados.

4 *La superficie convexa de la piramide conica*, es el producto de el lado en la mitad de la circunferencia de la base circular, y añadida la superficie de la base circular, serà toda la superficie conica. (fig. 3. prob. 8.

5 *La superficie de las piramides poligonas, que no son regulares*: Se halla buscando la area de cada triangulo de los que componen sus superficies (prob. 7. n. 1. 2.) y sumando las areas halladas, y añadida â esta suma la area de la base, se sabrà la total superficie. Si la piramide poligona fuere regular, se hallarà su superficie con sola vna operacion, es à saber, multiplicando el semiambito de su base, por la perpendicular tirada de su vertice à vno de los lados de su base.

6 La superficie de vna piramide conica recta *fig. 4. p. 8.* a la superficie del circulo, q̃ tiene por vase, es como el lado de dicha piramide al radio de la base. La razon es, porq̃ la superficie de dicha piramide es igual al rectangulo echo del lado de dicha piramide, y de la semiperipheria del circulo de su base. (cons. 4.) Este circulo es igual al rectangulo echo del radio, y de la semiperipheria (cons. 2.) Luego como estos rectangulos tengan vna misma base, que es la semiperipheria, serân entre si como las alturas. Esto es, como el lado de la piramide conica, al radio del circulo, que es su base: Luego la superficie, &c.

7 La superficie de vn cilindro recto, *fig. 4. p. 8.* à la superficie de la piramide conica de igual base, y altura, se ha como el lado del cilindro, à la mitad del lado de la piramide. La razon es, porque la superficie del cilindro recto es igual al rectangulo echo del lado, y de toda la peripheria de su base (cons. 3.) y la superficie de la pi-

piramide conica es igual al rectangulo de su lado, y la semiperipheria de su base, (conf. 4.) ù de la mitad de su lado, y de toda la peripheria de su base, que todo es vno, luego siendo sus bases iguales, seran como las alturas; Esto es como el lado del cilindro, à la mitad del lado de la piramide.

8 *La superficie de la esfera*, es el producto de su diametro en la circunferencia de su circulo maximo, que tiene el mismo diametro; tambien es el quadruplo de la superficie de dicho circulo.

9. Lo mismo q̃ se ha dicho de la superficie del cilindro, se ha de entender de la superficie del paralelepipedo, y del prisma.

Practica 3. fig. 3.

3 *Hallar la altura de los solidos.* En los prismas, piramides, y paralelepipedos, que tienen vn lado BC. perpendicular à la vase, el mismo lado es su altura. *Si los lados estàn inclinados*, como en la piramide ADXE. del punto E. se arrojarâ el perpendiculo EZ. sobre el plano de la vase continuado hasta Z. y serà la altura del solido.

Si el perpendiculo huviere de caer dentro del solido, como en la piramide *carb.* por el vertice h. se acomodarà vna regla, ò linea recta hg. paralela â la vase, y de qualquier punto g. se arrojarà el perpendiculo go. que serà la altura del solido.

Practica 4. fig. 4.

4. *Hallar la solidez de vn paralelepipedo, y prisma*, En el paralelepipedo DC. la vase AC. es paralelogramo; sus lados AB. de 4. pies, y BC. de 3. Luego multiplicando 4. por 3. sale la superficie AC. de 12. pies quadrados (prob. 7. pract. 1.) multiplicando esta superficie por la altura AD. 10. pies, que es el perpendiculo comun à los planos inferior, y superior, salen 120. pies cubicos de solidez en el paralelepipedo DC.

Con que multiplicando la superficie de la vase por la altura del paralelepipedo, ò prisma, sale su solidez. Lo mismo es de qualquiera otra figura regular, y del prisma, aunque sea pentagono. Como Z. que reducida la vase a triangulos (pract. 2.) y sabida su

su-

superficie, que se halló ser 20. pies quadrados, y su altura 10. multiplicando 20. por 10. salen 200. pies cubicos, que es toda la solidez del prisma; porque los prismas, y paralelepipedos de igual vase, y altura son iguales (5. l. 11. n. 5.)

Practica 5. fig. 5.

5 *Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares.* Esta se halla multiplicando la superficie de la base por vn tecio del altura de la piramide. Porque la piramide es vn tercio del prisma que tiene igual vase, y altura (5. l. 11. n. 2.) como en la piramide *abcd.* la superficie del triangulo *abc.* que es su base, se hallarà por la (pract. 1. deste) supongo sea 20. pies quadrados: su altura, que es la perpendicular *do.* del vertice al plano de la vase, sea 9. pies: su tercio serà 3. pies: y multiplicando la superficie 20. por 3. sale la solidez 60. pies cubicos. Lo mismo es en qualesquiera otras que tengan las vases quadradas, pentagonas, &c. *Si la piramide està rompida*, como h*lfqip.* y le falta el pedaço superior *pqir.*, aplicando dos reglas a los dos h*p. fq.* se hallarà el vertice r. y seràn dos piramides h*flr.* y *pqir.* y tomando las alturas del punto r. sobre los planos h*fl.* y *pqi.* (prob. 7. pract. 3.) y halladas las superficies de estos (prob. 7. pract. 2.) se hallarà primero la solidez de h*flr*: y despues la de *pqir.* como antes; y quitando esta de aquella, quedarà la solidez del pedazo h*flpqi.* &c. De semejante manera se hallarà la solidez de los demas cuerpos regulares (prob. 4.)

1 Consectario 1. *La solidez de la esfera*: es el producto del radio en vn tercio de su superficie. Porque la esfera es igual à vna superficie conica, cuya altura es el radio, y la base, la superficie de la misma esfera: que como la solidez desta piramide, se halla del modo, que abajo se dira; tambien la de la esfera, serà de la misma manera.

2 *La solidez del sector esferico*, se halla multiplicando la superficie del segmento esferico, por el tercio del radio: porque el sector de la esfera es igual à vna piramide conica cuya altura es

el

el radio de la esfera, y la base es igual à la superficie esferica de dicho sector.

3 *La solidez del segmento esferico.* Se halla midiendo antes el sector, y la piramide conica, y restando esta del sector, quedarà la solidez del segmento. *De aqui se puede colegir el modo de hallar la solidez de vna zona esferica.*

4. *La solidez del cilindro*, es el producto de su altura en la superficie de su base (fig. 4. prob. 8.)

5. *La solidez conica*, es el producto de vn tercio de su altura en la superficie de su base circular (fig. 4. prob. 8.)

Todos estos Consectarios demostró Archimedes, y quedan resueltos, hallada la quadratura del circulo; pero basta para la practica hallar la circunferencia, y superficie por las proposiciones del dicho Archimedes, ó Mecio; y en caso, que se deseasse mayor precision, se puede tomar la de Ceulen, que oy sirve de regla para examinar las quadraturas geometricas. Las quales se ponen todas al vltimo del problema siguiente.

Practica 6. fig. 6.

6. *Describir vn solido EF. semejante á otro RH. sobre vn lado dado ED.* Formese primero sobre ED. la base DC. semejante à BA. (prob. 3. pract. 7.) y sobre EG. el plano CG. semejante à QA. y sobre ED. el plano DG. semejante à BO. &c. formados todos los planos semejantes, y dispuestos con el mismo orden, seràn los solidos RH. EF. semejantes. *Demostracion.* Porque todos los angulos seràn iguales, y los lados proporcionales (def. 39. l. 11.)

Hallar la razon de los solidos semejantes RH. á EF. Si dados los lados homologos RB. y ED. se halla la tercera proporcional M. (prob. 2. pract. 6.) y conocidas RB. ED. y M. se halla la quarta proporcional N. (2. p. 7.) el solido RH. à EF. tendrà la razon que RB. à N. *Demostracion.* Porque son quatro continuas proporcionales RB. ED. M. y N. y RB. à N. tiene la razon triplicada de RB. à ED (def. 10. l. 5.) y pues RH. a EF. su semejante, tambien tiene la razon triplicada de RB. à ED. (6. l. 11. n. 2)

Lue-

Luego la razon de RH. a EF, será la misma que la de RB. à N. (1. l. 5. n. 2. 3.)

Practica fig. 7.

9. *Transformar vna piramide ABCD. en otra igual, sobre la base dada EFGHI.* Lo primero se hallarà la razon de la base EFGHI. â la base ABC. (6. p. 7.) y sea como *b.* â *d*; y tomando la recta *a.* igual à la altura de la piramide ABCD; conocidas *b. d. a.* se hallarà la quarta proporcional *c.* (2. p. 7.) y tomando esta por la altura de la piramide EFGHIO. serà igual a la piramide ABCD. *Demostracion.* Porque son reciprocos, como la base EFGHI. â la base ABC. Asi la altura *a.* à la altura *c*: Luego son las piramides iguales (5. l. 11. n. 5.)

Para hazer vna piramide igual á vn prisma, se tomará el triplo de la altura hallada. Para hazer vn prisma igual á vna piramide, se tomará el tercio del altura hallada, porque el prisma es triplo de la piramide (5. l. 11. n. 2.)

Transformar vna piramide ABCD. en otra, dada su altura *c.* Si la altura de la piramide ABCD. es *a.* la razon de *c.* à *a.* Serà la de las bases, luego formando otra base semejante à ABC. en razon de *c.* à *a.* (6. p. 1.) y transformandola despues en qualquiera especie de figura (6. pract. 7.) saldrà siempre la piramide igual. *Demostracion.* Porque siempre seràn las bases, y alturas reciprocas (5. l. 11. n. 5.) Lo mismo es en los prismas &c. *Entre prismas, y piramides se toma el triplo, ó tercio como antes.*

Entendido bien el modo de transformar las figuras planas (prob. 6. n. 4. 5. 6. y 7.) con facilidad se transformaràn los solidos; porque reduciendo las bases de los solidos a paralelogramos, y hallada la razon (prob. citado) se transformaràn en qualquiera otra especie; y hallando las alturas (n. 7. al principio) estarà transformado vn solido en otro.

PROBLEMA VIII.

DE LOS PROBLEMAS NO RESVELTOS.

1. De la triseccion del angulo, ò arco, &c.

De

2 De la inscripcion del heptagono.

3 De las dos medias proporcionales.

4. De la quadratura del circulo.

Problemas no resueltos se llaman aquellos, que no estàn, sin controversia demostrados, como son los referidos.

DE LA TRISECCION DEL ANGVLO.

1. El angulo recto, facilmente se divide en tres partes iguales; porque el angulo de vn triangulo equilatero, es vn tercio de dos rectos (5. l. 1. n. 5.) por ser todos los angulos iguales à dos rectos, (3. l. 1. n. 1.) Luego su mitad serà vn tercio de vn recto. Methodo general para todos los angulos, hasta oy no se ha visto. Dejando los diferentes medios que se valieron el Obispo Caramuel, Papa Alexandrino; Francisco Vieta; Antonio Santino, y otros; solo pondrè el medio de que se valiò el citado Padre Zaragoza, que es el que se sigue.

figura 1. prob. 8.

Sea el arco TV. y el diametro TR. si se tira VY. que ZY ZS. sean iguales: serà RY. ò TX. vn tercio de TV. ò del angulo TSV. Porque es Isoceles ZYS; seràn los angulos ZYS. ZSY. iguales (5. l. 1. n. 2.) luego YR. ò TX. es la mitad de VX. ò vn tercio de TV. (3. l. 3. n. 11.) por ser lo mismo el angulo S. que el angulo Y. en la circunferencia. He dejado de poner las demostraciones, porque propriamente no son demostraciones, pues el medio que se toma necesita de demostracion; y solo se puede partir el angulo, ò arco igualmente en 2. 4. 8. &c.

DEL HEPTAGONO.

2 No ay arte para inscrivir en el circulo otras figuras regulares que las explicadas en el problema 5. y las que se pueden continuar por biseccion de los arcos; las de 7. 9. 11. 13. 17. 19. &c. lados se podian inscrivir geometricamente, si se hallasse arte para formar vn triangulo isoceles, que qualquier angulo sobre la base, fue-

re triplo, quadruplo, &c. del vertical; assi como se hallò el triangulo isoceles del angulo duplo, (5. p. 5.) que sirve para el pentagono; el triplo serviria para el Heptagono; el quadruplo para el Nonagono, &c. pero no aviendo modo geometrico para formar dicho triangulo, explicarè el siguiente methodo, bastante para la practica.

Practica para el Heptagono. (fig. 2.)

Tirese el diametro AI. y con la distancia igual al semidiametro AL, hagase el arco CLC. tirese la recta CC, y su mitad CO serà el lado del Heptagono, que caberâ 7. vezes en la circunferencia del circulo dado.

Practica para todas las figuras regulares, que se han de inscrivir en el circulo.

Dividase vn quadrante del circulo dado, en tantas partes iguales, quantos tiene lados la figura, que se ha de inscrivir: Tomense siempre quatro de las dichas partes, y esta distancia caberâ tantas vezes justamente en el circulo, quantos lados tiene la figura. *Exemplo.* Quiero inscrivir el pentagono, divido vn quadrante del circulo en cinco partes iguales; tomo con el compas las 4: y esta distancia serâ el lado del pentagono. La razon es, porque las cinco partes, en que estâ dividido el quadrante, caben quatro vezes en todo el circulo: luego quatro de ellas, caben cinco vezes, y assi de los demas poligonos regulares.

DE LAS DOS MEDIAS PROPORCIONALES. fig. 3.

3 Este problema es de grande vtilidad en la Geometria, por servir para la resolucion de otros inumerables; lo que motivò a los Geometras intentar resolverle por varios modos; pero ninguno tiene la rigurosa demostracion, que se desea. Propondrè solamente vno, que me parece ser el mas inteligible, que es de Platon.

Sean dadas las dos rectas AO. OC. y se pidon otras dos, que sean medias proporcionales.

Disponganse las lineas dadas, de suerte, que compongan el el angulo recto O. alarguese a discrecion la linea AO. àzia E; y CO. àzia T; en la linea OT. formese el angulo recto ATE. de tal suerte, que formando assimismo el angulo recto TEC. en la linea OE. la linea EC. cayga en el punto C. (para lo qual no ay regla geometrica) Pero se puede hazer aplicando el angulo recto de vna esquadra sobre la linea OT. y el angulo recto de otra esquadra, sobre la linea OE. procurando ajustar perfectamente el braço TE. de la primera, con el braço ET. de la segunda; y los otros braços caygan, el vno sobre el punto A. y el otro sobre el punto C. y entonces las lineas OT. OE. seran las dos medias proporcionales, que se desean.

Demostracion. La linea OT. es media proporcional entre AO. y OE; (6.l.6.n.2.) de la misma manera la linea OE. es media proporcional entre OT. y OC. (6.l.6.n.2.) Luego como AO. à OT. assi OT. à OE; y como OT. à OE. assi OE. à OC. quarta proporcional: Luego OT. OE. son las dos medias que se buscavan.

DE LA QUADRATURA DEL CIRCULO.

4 Lo que se pide en la quadratura, es formar vn quadrado, que su area, superficie, ò capacidad sea igual al espacio, que la linea circular comprehende. Archimedes demostrò, que el circulo es igual à vn triangulo, que tiene la base igual à la circunferencia, y la altura, ò perpendiculo igual al radio; porque qualquiera figura regular inscrita en el circulo, se resuelve en tantos triangulos iguales, y semejantes, como lados; (fig. 4. prob. 8.) teniendo pues todos los triangulos igual perpendiculo; serà toda la figura igual al triangulo, que tenga la base igual à todos los lados, y la altura igual al perpendiculo; considerando pues al circulo como polygono de infinitos lados, y que su perpendiculo es el radio: serà todo el circulo igual tambien al triangulo, que tiene por base vna recta igual à toda la circunferencia, y al radio por altura, ò perpendiculo.

De que se infiere, que conocida la proporcion del diametro à la circunferencia, dado el diametro del circulo de la circunferencia que se busca, se podrà hallar vna recta igual à la circunferencia (prob. 2. pract. 7.) y con esta base formando qualquier triangulo, que tenga por altura el radio, que es la mitad del diametro conocido, serà igual al circulo, y despues facilmente se podrà transformar en vn quadrado (6. p. 7.) pues el triangulo de doblada base, es igual al rectangulo de la mitad de la base.

La proporcion proxima, que hallò el grande Archimedes del diametro à la circunferencia, es de 7. a 22; pero sale la circunferencia mayor de lo justo.

Dado pues el diametro, se hallarà la circunferencia por vna regla de tres. Si vn circulo tiene de diametro 35. pies, dirè: si 7. dan 22. que daràn 35? y salen 110. pies de circunferencia. Si se diere la circunferencia de 110. pies, se hallarà el diametro desta manera: Si 22. dan 7. què daràn 110? y salen 35. pies de diametro. *La proporcion que hallò Adriano Mecio, es suponiendo el diametro de 113. partes, y la circunferencia de 355.* Esta proporcion es la mas justa de quantas se han hallado en numeros pequeños, pues no excede la circunferencia de lo justo, en tres partecillas de diez mil, en que se puede considerar dividido el diametro. Se hallarà el diametro, y circunferencia, segun esta proporcion, de la misma manera, y orden que se ha dicho arriba en la proporcion de Archimedes. Los consectarios que de aqui nacen, se explicaron en el (prob. 7. pract. 2.) La proporcion que hallò Ceulen, es dar al diametro 100.000.000.000.000.000.000. y à la circunferencia 314.159.265.358.979.323.847. Esta proporcion no excede en vna partecilla de cien tricuentos, cuyo vso es el mismo que hemos dicho de la proporcion de Archimedes, y es la que sirve de regla para la mas cabal quadratura del circulo.

Razon de la circunferencia del circulo con su diametro.

	circunferencia	diametro
Archimedes.	22.	7
Adriano Mecio.	223.	71
Luis de Ceulen.	314.	100

Fin de la Geometria pract.

APENDICE.

SE ponen en este Apendice vna breve suma de los mas principales theoremas de la Geometria, segun previne en mi introduccion.

I. DEL CIRCVLO.

Como 10000. *á* 62832. *asi el radio, ó semidiametro del circulo á su circunferencia.*

1. *Como* 10000. *á* 1592. *asi la circunferencia al radio.*

Dado el radio, se hallarà la circunferencia por la regla primera. Vn circulo tiene 6 planos de Radio, pidese la circunferencia. Digo si 10000. dan 62832. que daran 6? salen 37 $\frac{6992}{10000}$. Dada la circunferencia se hallarà el radio por la segunda regla: vn circulo tiene 40. palmos de circunferencia, pidese el radio? Si 10000. dan 1592. que daràn 40? salen 6 $\frac{3680}{10000}$. palmos.

II. FIGVRAS DENTRO, Y FVERA DEL CIRCVLO.

1. *Dado el circulo hallar las figuras.*

2. *Dada la figura hallar el circulo.*

	Inscriptas.	Circũscriptas.	Inscripto.	Circũscripto.
Triangulo	17320.	34640.	2887.	5773.
Quadrado	14142.	20000.	5000.	7071.
Pentagono	11756.	14530.	6882.	8507.
Hexagono	10000.	11547.	8660.	10000.
Sietavono	8678.	9630.	10384.	11524.
Ochavono	7654.	8284.	13071.	13066.
Nonavono	6840.	7297.	13704.	14619.
Diezavono	6180.	6498.	15388.	16180.
Dozavono	5176.	5358.	18660.	19319.

III. DADO EL CIRCVLO HALLAR LAS FIGVRAS.

Como 10000. *al numero de la Tabla primera, asi el radio dado del Circulo al lado de la figura.* Vn circulo tiene 4. palmos de Radio, ò semidiametro, pidese el lado del Pentagono inscripto. Digo si

10000.

10000. dan 11746. que daràn 4? salen $4\frac{7024}{10000}$ *palmos*. Pidese el Pentagono circunscripto. Si 10000. dàn 14530. que daràn 4. salen $5\frac{8120}{10000}$ *palm*. Pidese el Nonavono inscripto, si 10000. dan 6840. que daran 4? salen $2\frac{7360}{10000}$ *palm*. Pidese el *Dozavono circunscripto*. Si 10000. dan 5358. que daràn 4? salen $2\frac{1432}{10000}$ *palm*. y assi de los otros, &c.

IV. *Dada la Figura, hallar los circulos.*

Como 10000. *al numero de la Tabla, assi el lado de la Figura al radio, o semidiametro del Circulo.*

Vn triangulo equilatero tiene 6. palmos de lado, pidese el circulo inscripto dentro del triangulo. Digo si 10000. dan 2887. que daràn 6? salen $1\frac{7322}{10000}$ palmos de radio.

Vn Quadrado tiene de lado 5. palmos, pidese el Circulo Circunscripto, que toquè los quatro angulos. Digo, si 10000. dan 7071. que daràn 5? salen $3\frac{5355}{10000}$ *palm*. el radio, &c.

V. SVPERFICIES DE LAS FIGVRAS.

	Dado el lado hallar la Superficie.	Dada la Circunferencia, hallar la Superficie.	Dada la superficie hallar el lado.	Dada la superficie hallar la circunferencia.
Triangulo	4330	481.	15186.	207845.
Quadrado	10000.	625.	10000.	160000.
Pentagono	17205.	688.	5812.	145308.
Hexagono	25981.	722.	3849.	138568.
Sietavono	36339.	742.	2752.	134844.
Ochavono	48284.	754.	2071.	132549.
Nonavono	61818.	763.	1618.	131028.
Diezavo.	76942.	769.	1300.	129969.
Dozavo.	111961.	778.	893.	128619.
Circulo.	31416.	796.	3183.	125689.

Da-

VI. *Dado el lado hallar la Superficie.*

Como 10000. *al numero del orden primero: assi el quadrado del lado, à la Superficie de la Figura.* Tiene un Triangulo equilatero 6 palmos de lado, pídese la superficie: digo si 10000. dan 4330. que daràn 36. quadrado del 6? salen 15 $\frac{5880}{10000}$.

Dada la circunferencia hallar la superficie.

Como 10000. *al numero del orden segundo; assi el quadrado de la circunferencia á la superficie de la Figura.* Tiene la circunferencia 24. palmos, pidese la superficie del Circulo: el quadrado de 24. es 576. Luego si 10000. dan 796. que daràn 576? salen 45 $\frac{8496}{10000}$.

VII. *Dada la superficie se busca el Lado.*

Como 10000. *al numero del orden tercero: assi la superficie dada, al quadrado del lado, que se busca.* La superficie de vn *Diezavo*, tiene 50. palmos; pidese su lado. Digo si 10000. dan 1300. que daràn 50? salen 6 $\frac{5000}{10000}$ quadrado del lado: luego el lado serà $\sqrt{}^2$ 6 $\frac{5000}{10000}$ que es 2 $\frac{5495}{10000}$.

Dada la Superficie se busca la Circunferencia.

Como 10000. *al numero del orden quarto; assi la superficie dada al quadrado de la circunferencia.* La superficie de vn circulo es 30. *pal.* pidese su circunferencia. si 10000. dan 125689. que daràn 30? salen 377 $\frac{0670}{10000}$ quadrado de la circunferencia: Luego la circunferencia serà $\sqrt{}^2$ 377 $\frac{0670}{10000}$ que es proxima 19 $\frac{39}{100}$ &c.

VIII. *REDVZIR VNA FIGVRA A OTRA.*

Es hallar otra de diferente especie, que tenga igual Circunferencia ò superficie I. Si se pide otra de igual circunferencia, multipliquese el lado dado de la Figura por el numero de sus lados, y el Producto partase por el numero de los lados de la otra; como si vn Pentagono, ò Cinçavono tiene de lado 9. palmos, quiero vn Triangulo equilatero de igual Circunferencia; porque el Pentagono tiene 5. lados, multiplico 9. por 5. sale 45. parto por 3. lados

dos del triangulo salen 15. palmos, y serà lado del Triangulo. Pero si se pide vn circulo de igual circunferencia, tomando el Producto 45. por circunferencia, hallarè el lado por el §. 1. Si se dà el radio del Circulo 6. palmos, se buscarà su circunferencia $37 \frac{6992}{10000}$ por el §. 1. y si se busca vn quadrado, se partirâ por 4. y sale el lado $9 \frac{4248}{10000}$ &c.

IX. *Si ha de ser la superficie igual.*

Dado el lado, ò circunferencia de la Figura I. se hallarà la superficie, §. 6. Con esta superficie, se hallarà el lado de la nueva Figura §. 7. como si vn Quadrado tiene 6. palmos de lado, pidese vn circulo de igual superficie. Por el §. 6. serà la superficie del quadrado 36. Luego por el §. 7. Si 10000. dan 3183. que daràn 36. salen $11 \frac{4588}{10000}$ su $\sqrt{2}$ es $3 \frac{3850}{10000}$ radio del circu.

X. *Aumentar, ò disminuir las figuras.*

Los terminos de la proporcion dada, son proporcionales con los Quadrados de los lados de las Figuras semejantes, Vna Figura (sea Triangulo, Quadrado, Circulo, &c.) tiene de lado 6. palmos, quierese aumentarse, que la superficie de la primera à la segunda sea, como 9. à 16. El Quadrado de 6 es 36. digo si 9. dan 16. que daràn 36? Sale 64. y es el Quadrado del nuevo lado. La $\sqrt{2}$ de 64. es 8. lado de la segunda Figura II. Vn circulo tiene 8. palmos de radio, quierese desminuir, que el I. al II sea como 16. à 9. El quadrado de 8. es 64. Digo si 16. dan 9. que daràn 64? salen 36. su $\sqrt{2}$ es 6. radio del II. Circulo.

XI. Si la figura no fuere de lados iguales: I. se hallarà el vn lado como antes, II. se hallaràn los otros lados por la regla de 3. como si vn Triangulo tiene el vn lado de 6. palmos, el otro de 4. y el otro de 5. quierase aumentar en proporcion de 9 a 16. tomo el vn lado 6. su quadrado es 36. si 9. dan 16. que 36? sale 64. su $\sqrt{2}$ es 8. y serà el vn lado del nuevo Triangulo: Luego si 6. dan 4. que daràn 8? sale $5 \frac{1}{3}$. El lado II. si 6. dan 5. que daràn 8? sale $6 \frac{2}{3}$. El lado III. Lo mesmo es en todas las Figuras irregulares.

CVER-

XII. CUERPOS DENTRO, Y FUERA DE LA ESPHERA.

	I. Dada la esphera hallar el Cuerpo.		II. Dado el Cuerpo hallar la esphera.	
	Inscripto	Circũſcripto.	Inſcripta.	Circunſcripta.
Tetraedro.	16330.	48990.	2041.	6124.
Cubo.	11547.	20000.	5000.	8660.
Octaedro.	14142.	24495.	4082.	7071.
Dodecaedro.	7136.	8981.	11135.	14012.
Icoſaedro.	10515.	13232.	7558.	9511.

XIII. *Dada la esphera hallar los Cuerpos.*

Como 10000. *al numero de la Tabla* I. *aſsi el radio de la esphera al lado del Cuerpo inſcripto, ó circunſcripto.* Vna esphera tiene 8. palmos de radio, pideſe el *Tetraedro* inſcripto dentro de la esphera. Digo ſi 10000. dan 16330. que darán 8? ſalen $13\frac{0640}{10000}$ *palmos*

Pideſe el *Cubo* Circunſcripto: Si 10000. dan 20000. que darán 8? ſalen 16. palmos. Pideſe el *Dodecaedro* Circunſcripto. Si 10000. dan 8981. què darán 8? ſalen $7\frac{1848}{10000}$ *palmos*, &c.

XIV. *Dados los Cuerpos hallar las Espheras.*

Como 10000. *al numero de la Tabla* II. *aſsi el lado del Cuerpo al radio de la Esphera inſcripta, ó circunſcripta.* Vn *Octaedro* tiene 5. *palmos* de lado, pideſe la *Esphera* inſcripta. Si 10000. dan 4082. que darán 5? ſalen $2\frac{0410}{10000}$. Pideſe la *Esphera* Circunſcripta. Si 10000. dan 7071. que darán 5? ſalen $3\frac{5355}{10000}$ &c.

	Dado el lado hallar la Superficie.	Dada la superfi. hallar el Lado.	Dado el lado hallar la Solidez.	Dada la Solidez hallar el Lado.
Tetraedro.	17320.	5774.	1178.	84851
Cubo.	60000.	1667.	10000	10000
Octaedro.	34640.	2887.	4714.	21213
Dodecaed.	206457.	484.	76631	1305
Icosaedro.	86600.	1154.	21817	4523
Esphera.	125664.	796.	41888	2387

XVI. *Dado el lado hallar la superficie.*

Como 10000. *al numero del orden* I. *assi el quadrado del lado dado á la superficie del cuerpo.*

VnaEsphera tiene 4. palmos de radio, pidese la superficie. El Quadrado de 4. es 16. digo, si 10000, dan 125664. que daràn 16? salen $191\frac{0624}{10000}$. y es la superficie del globo.

XVII. *Dada la Superficie hallar el lado.*

Como 10000. *al numero del orden* 2. *assi la superficie dada al Quadrado del lado, que se busca del Cuerpo.* Vn *Dodecaedro* tiene de superficie 60. *palm.* pidese el lado. Si 10000. dan 484. que daràn 60? salen $2\frac{9040}{10000}$ su $\sqrt{}^{2}$ es $1\frac{70}{100}$. lado del *Dodecaedro.*

XVIII. *Dado el lado hallar la Solidez del Cuerpo.*

Como 10000. *al numero del orden* 3. *assi el Cubo del lado dado á la Solidez que se busca del Cuerpo.*

Vn *Tetraedro* tiene 10. *palmos* de lado: su Cubo es 1000. Si 10000. dan 1278. que daràn 1000? salen $117\frac{80000}{10000}$ *palmos* de Solidez.

XVIX. *Dada la solidez hallar el lado.*

Como 10000. *al numero del orden* 4. *assi la Solidez dada, al Cubo del lado que se busca del Cuerpo.*

Tie-

Tiene vna *Esphera* 110. *palmos* de Solidez, pidese el radio. Si 10000. dan 2387. que daràn 110? salen $26 \frac{2570}{10000}$ Cubo del lado, su $\sqrt{3}$ es $2 \frac{97}{100}$ radio de la *Esphera*.

XX. *Reduzir vn Cuerpo á otro de igual superficie.*

1. Se hallarà la Superficie del Cuerpo dado §. 16. 2. Con aquella superficie se hallarà el lado del nuevo Cuerpo §. 17. Vn Cubo tiene 4. palmos de lado, pidese vna Esphera de igual superficie: la Superficie del Cubo §. 16. es 96: luego por el §. 17. Si 10000. dan 796. que daràn 96? salen $7 \frac{6416}{10000}$ su $\sqrt{2}$ es $2 \frac{76}{100}$ el radio de la Esphera de igual superficie.

XXI. *Reducir vn Cuerpo à otro de igual Solidez.*

1. Se hallarà la Solidez del Cuerpo dado §. 18. 2. Con esta Solidez se hallarà el lado del nuevo Cuerpo §. 19.

XXII. *Aumentar, ó disminuir la Solidez de los Cuerpos.* *Los terminos dados, son proporcionales à los Cubos de los lados de los Cuerpos.* Vn Cuerpo tiene 10. *palmos* de lado, quiero aumentarle, que la Solidez del 1. à la del 2. sea como 2. à 3. El Cubo de 10. es 1000. Digo si 2. dan 3. que daràn 1000? salen 1500. su $\sqrt{3}$ es $11 \frac{44}{100}$ lado del nuevo Cuerpo, sea *Tetraedro*, ò Cubo, &c. Si la proporcion dada fuere de las Superficies, se obrarà como en el §. 10. Si el Cuerpo fuere irregular, se hallaràn los otros lados por regla de tres, como en el §. 11.

REGLAS PARA LOS ARTIFICES.

Los Artifices para determinar el justo precio de sus obras, deven atender a la materia, y al trabajo. *Los precios del trabajo, guardan la proporcion, que los quadrados de los lados, quando solo se trabaja la superficie: Pero los precios de la materia, guardan la proporcion de los Cubos de los lados.*

Exemplo. Vna Lampara de plata, que tiene dos palmos de diametro, vale de manos veinte, y quatro pesos: Otra de quatro palmos de diametro, que guarde en todo la misma proporcion, que costarà de manos? Para formar la regla de tres, tomo los quadrados del 2. y 4. que son 4. y 16. y digo: Si 4. dan 16. quedaràn 24. y salen 96. pesos. Si la primera tiene 60. onzas de plata, que tendrà la segunda? Para formar esta regla de tres, tomo los cubos del 2. y 4. que son 8. 64. y digo: Si 8. dan 64. quedaran 60. onzas? y salen 480. onzas. *De esta regla han de vsar todos los Artifices, que ponen el material, y labran solamente la superficie.*

Pero si se labra tambien lo interior, y maçiço de la obra, como en las paredes, y torres de ladrillo, se avrà de sacar el precio del trabajo, formando la regla de tres por los cubos, como para sacar la cantidad de la materia.

En los Doradores, es al revès, q̃ solo ponen el material en la superficie, porque deben sacar el valor de la materia, de la misma manera, que se saca el valor de las echuras, formando la regla de tres por los quadrados de los lados.

Exemplo, Vn retablo que tiene 20. palmos de ancho, se dora por 300. libras: Otro de la misma forma, que tiene 30. palmos de ancho, por quanto se dorarà? Para resolver esta question por la regla de tres, me valgo de los quadrados de 20. y 30. que son 400. y 900. y digo, si 400. dan 900. quedaràn 300. libras? y se hallan 675. libras. Para sacar la cantidad de Oro, q̃ ha de entrar, me valgo de la misma regla de tres, como por exemplo en el primero entraron 8000. panecillos de Oro. Si 400. dan 900. quedaràn 8000? y salen 18000. panecillos.

Esto se debe entender quando ay total semejanza en la obra, porque el precio puede ser mayor, ó menor, si en la obra huviere mas, ó menos primor; mas, ó menos perfeccion; para lo qual no se puede dar regla cierta.

Del quadrado, y Cubo.

Quadrado, es el producto de vn numero multiplicado por si mis-

mismo; y el Cubo es el producto del quadrado, multiplicado por el mismo numero v. g. Sea el 2. el numero dado, multiplicado por si mismo, sale el producto 4. que es el *quadrado*; y multiplicado el quadrado 4. por el numero dado 2. sale el producto 8. que es el *Cubo*; y el 2. es la raiz quadrada, y cubica.

DE LA PROGRESSION NATURAL.

Tambien es preciso que se tenga noticia de la progression arithmetica, que es *una serie de numeros, que se van excediendo con igual exceso*. La natural es la siguiente: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. Si el mayor termino 9. se multiplica por el numero de los terminos, ò por el numero que se sigue al mayor, si se continuara la progression, que es 10. La mitad del producto, serà la suma de todos los terminos de la progression. De esta progression, se colige la resolucion de las questiones semejantes al exemplo siguiente.

Exemplo. Si vn pozo que tiene 15. varas de hondo, se abre por 36. lib. Otro pozo, que ha de tener 28. varas de hondo, por quanto se abrirà? Porque quanto mas se profunda, es mayor el trabajo, antes de formar la regla de tres, se han de imaginar dos progressiones naturales, cuyo primer termino sea el zero (como se previno arriba) y el vltimo, en la primera sea 15. y en la otra 28. la suma de la primera progression, segun la regla dada, es 120. y la, de la segunda es 406. Digo pues, si 120. importan 36. que importan 406? y salen $121\frac{120}{96}$. que reduzido à minimos terminos, es el quociente $121\frac{4}{5}$. Esto es 121. lib. 16. sueldos, suponiendo la libra de 20. sueldos. De esta suerte se sacarà el valor de las echuras de los edificios, cuyo valor sube, quanto mas se levanta la obra.

BRE-

BREVE RESUMEN DE LOS PRINCIPIOS, Y REGLAS GENERALES DE LA GEOMETRIA.

1. Todas las ſuperficies ſemejantes, tienen entre sì la proporcion, que los quadrados de los lados ſemejantes.

2. Todos los cuerpos ſolidos ſemejantes, tienen entre sì la proporcion, que los Cubos de ſus lados ſemejantes.

3. La circunferencia de vna Columna igualmente grueſſa (quadrada, ò redonda, &c.) multiplicada por ſu altura, dà la ſuperficie.

4. La ſuperficie de la baſe de vna Columna quadrada, ò redonda, &c. multiplicada por ſu altura, dà la ſolidez.

5. La ſuperficie de vna piramide, quadrada, ò redonda, &c. multiplicada por vn tercio de ſu altura, da la ſolidez de la piramide.

6. El todo es igual à todas las partes juntas.

7. Las cantidades iguales à otra, ſon iguales entre sì.

8. Si à iguales ſe *añaden* iguales, ò quitan iguales, quedan iguales.

9. Si iguales ſe multiplican, ò parten por iguales, los productos, ò quocientes ſon iguales.

10. El multiplicador, ò Partidor comun no altera la proporcion.

11. La proporcion directa, es tambien alterna, y converſa, &c.

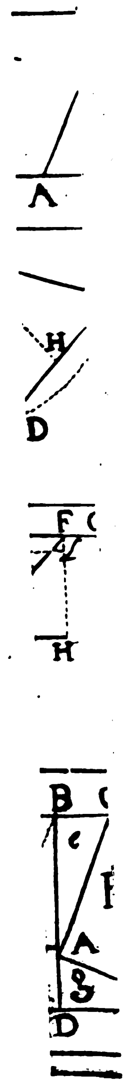
12. Si à proporcionales ſe añaden, ò quitan proporcionales ſemejantes, reſultan proporcionales.

las

13. Si ay quatro proporcionales, el producto de los estremos, es igual al producto de los medios.

14. Si ay tres proporcionales, el producto de los estremos, es igual al quadrado del medio.

ET SIT FINIS QUEM DEDIT DEUS Optimus maximus.



A 3 PORT-

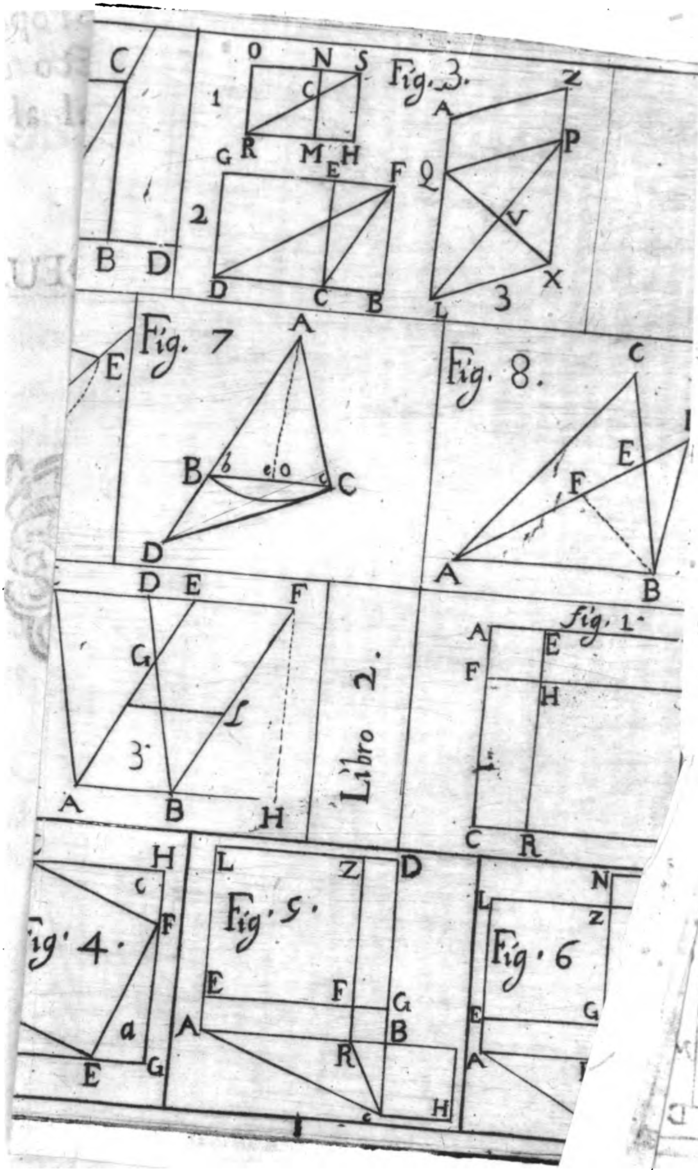
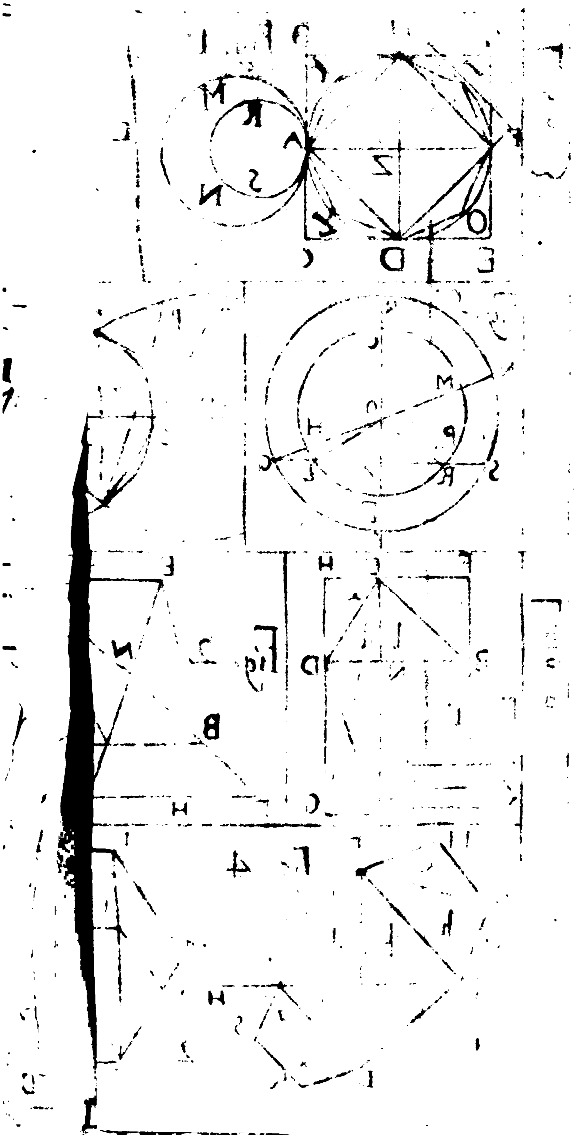
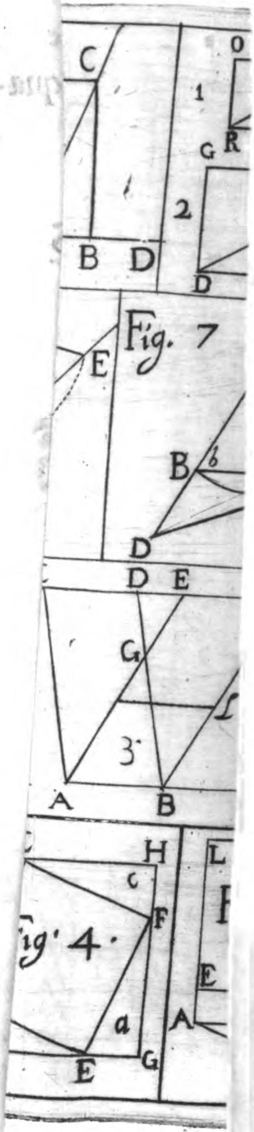


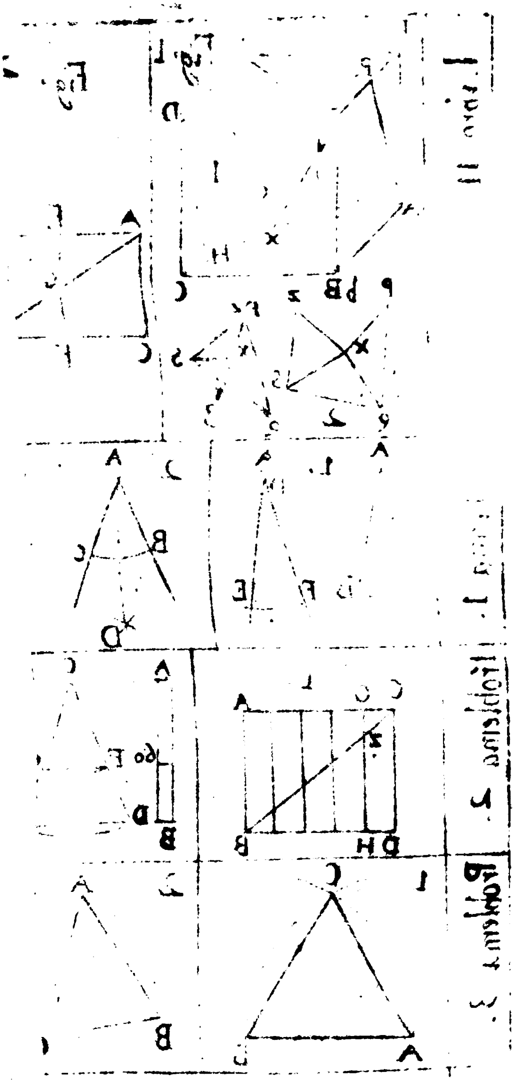
Fig. 3.
Fig. 7
Fig. 8.
Libro 2.
fig. 1
Fig. 4.
Fig. 9.
Fig. 6

[illegible] agalajas.

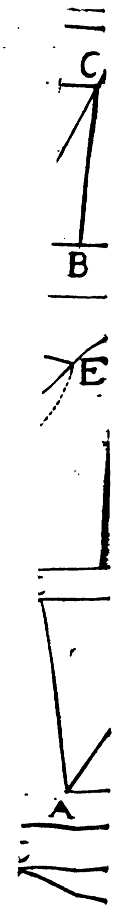




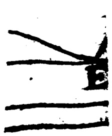
C
B D
O
1
R
G
2
D
Fig. 7
E
B
b
D
D E
G
3
A B
H
L
c
F
ig. 4
E
a
E G
A

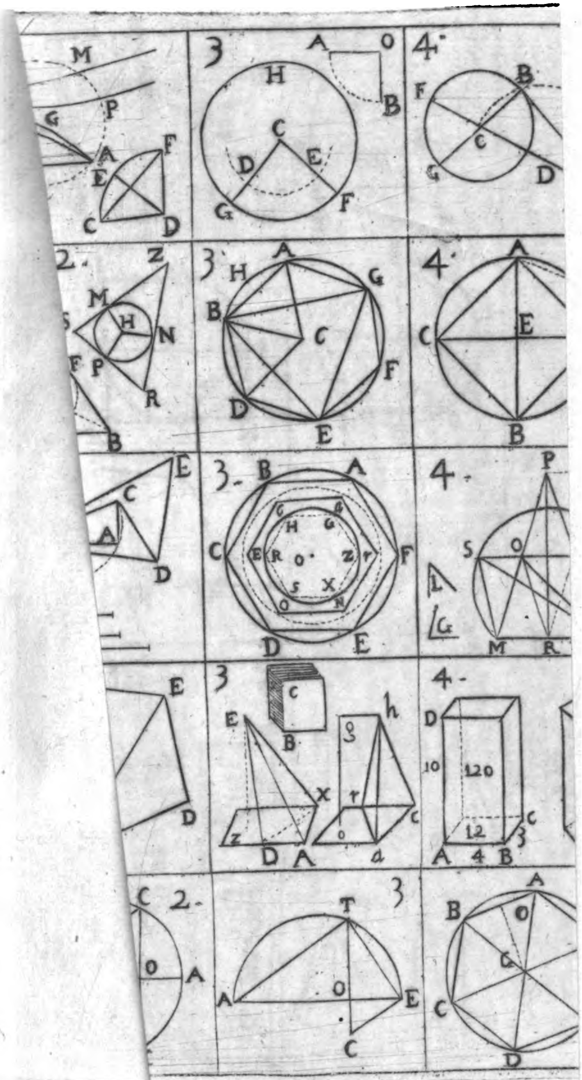


Los del Sol co ugalajas.



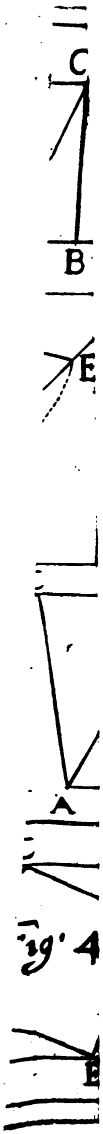
ig' 4





Los del Sol co

agalajas.



ig. 4

AL

MARQVES DE SAN FELIZES,
Doña Luisa Sola y Arellano.

En ti el Sol se arrebola,
Que por Hija del Sol, te llaman Sola.

SONETO.

AL buelo de tu pluma, yà Atalanta,
O, insigne Aragonès, no corre, buela,
Y los pomos de Venus, à que anhela,
Por premio ofrece à tu Divina planta.

Hipomenes por ti yà se adelanta,
Y en seguir su hermosura se desvela,
Yà Amor agita en la picante espuela,
Velocidad, que al pensamiento espanta.

Los Cisnes pues, del claro Mançanares,
A los del Ebro cederàn gustosos,
Viendo que tu, sus vozes aventajas:

Con festejos aplaudan singulares,
Las hermanas tu nombre, que famosos
Los del Sol con aplausos agasajas.

PORCIA

A FELICIO,

en la Fabula de Atalanta.

Si las Flores tienen la estimacion en su excelencia,
Quien mas excelente, que tu.

SONETO.

AVnque Tragica, yà serà dichosa,
Atalanta en el ayre de tu pluma,
Y tinta de Aganipe; yà la espuma
Revivirà à los siglos mas gloriosa.

De la Fama, la Trompa sonorosa,
Por mas que en Ecos resonar presuma,
No llegarà à tu aliento, en que el Sol suma
Impulsos de su fuerça luminosa.

Canta en general credito de España,
Ilustre Aragonès, y las Naciones
Numeren con aplausos tus acentos.

Y Castilla, que en vozes te acompaña,
Corone entre sus inclitos Varones
De tu dulce Eloquencia los concentos.

AL

AL
MARQVES DE SAN FELIZES,
Doña Iuana Bazquez.

Si la Rosa se marchita à los rayos del Sol;
El Sol se eclipsa à las luzes desta Rosa.

SONETO.

VEnce Hipomenes si ha de coronarte,
De Atalanta la empresa peligrosa,
Y el viento, que seguir sus pies no ossa,
Mire rendida su destreza al Arte.

Mas oy cede el Laurel à mejor Marte;
Si Apolo en Lira, pues la Fabulosa
Hazaña nos la ofrece tan gustosa,
Que obligado, y vencido ha de dexarte.

Por mas que tus venturas solenizas,
Esta te erige à la inmortal memoria,
Sin temer del olvido, ni vn desmayo:

Que dando tantas glorias por Felizes,
Y aclamando el Parnaso la Vitoria
A honor de España, timbre de Moncayo.

CON-